Über das durch die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Ordnung bestimmte Nullsystem.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

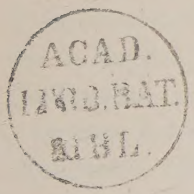
Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt von

Joseph Welsch

aus Hamburg.

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Oktober 1911.



Erlangen.

K. B. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Junge & Sohn.

1912.

252

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät der Universität Erlangen.

Referent: } Herr Professor Dr. Noether.
Dekan: }

Vorwort.

Im 1. Teile, Seite 78 ff. seines Werkes über Liniengeometrie verallgemeinert R. Sturm den Begriff des Nullsystems dahin, daß er einer Ebene mehrere inzidente Punkte und umgekehrt einem Punkt mehrere durch ihn gehende Ebenen zuordnet. Er erwähnt dabei auch die Nullsysteme, zu denen uns die Strahlenkongruenzen führen. Von dieser letzteren Art ist das in der vorliegenden Arbeit behandelte; die zugrunde liegende Kongruenz wird von den gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Ordnung gebildet.

Die Einteilung des Stoffes ist kurz die folgende. Im 1. Teile werden Ordnung, Klasse und Rang der Kongruenz und dadurch auch die drei Charakteristiken des Nullsystems bestimmt. Bei dieser Gelegenheit werden mehrere sich unmittelbar ergebende Flächen und Kurven näher untersucht, so die Brennfläche der Kongruenz, die von den eine beliebige Gerade treffenden Kongruenzstrahlen hervorgerufene Fläche u. s. w.

Im 2. Kapitel wird dann untersucht, welche Kurve die Nullpunkte eines Ebenenbüschels beschreiben, bezw. welcher Art die abwickelbare Fläche ist, die von den Nullebenen einer Punktreihe (1. Ordnung) umhüllt wird. Als wichtige Ausartung ergibt sich hier der Fall, in welchem eine der beiden gegebenen Flächen in einen Kegelschnitt, speziell in den imagi-

nären Kugelkreis ausartet. Im Anschluß daran ist noch kurz die Kurve behandelt, die von den Nullpunkten der Ebenen eines Büschels 2. Klasse erzeugt wird und ebenso der dazu duale Torsus.

Im 3. Kapitel endlich werden die Flächen untersucht, die von den Nullpunkten eines Ebenenbündels bezw. von den Nullebenen eines ebenen Feldes hervorgerufen werden. Die dabei sich ergebenden Spezialfälle sind im wesentlichen dieselben wie im 2. Kapitel.

Die Anregung zu der Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. Doehlemann. Derselbe hat mich auch bei der Ausführung stets bereitwilligst durch seinen Rat unterstützt. Ich spreche ihm an dieser Stelle meinen Dank aus. Für die Korrektur der Abhandlung bin ich Herrn Dr. Baldus zum Dank verpflichtet.

Hamburg, Mitte September 1911.

J. Welsch.

I. Kapitel.

Die Charakteristiken des Nullsystems.

1. Gegeben seien 2 Flächen 2. Ordnung F_1^2 und F_2^2. Die Tangenten einer jeden dieser Flächen erfüllen dann einen Komplex 2. Grades. Die beiden Komplexen gemeinsamen Strahlen bilden folglich eine in sich duale Kongruenz von $2 \cdot 2 = 4$. Grade. Jede Ebene π schneidet nämlich aus den gegebenen Flächen 2 Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 aus, die 4 gemeinsame Tangenten a, b, c, d haben; also ist die Klasse der Kongruenz

$$n = 4.$$

Und von jedem Punkte P des Raumes kann man an F_1^2 und F_2^2 2 Tangentialkegel φ_1^2 und φ_2^2 legen, die 4 gemeinsame Erzeugende a', b', c', d' haben; folglich ist auch die Ordnung der Kongruenz

$$m = 4.$$

Auch der Rang der Kongruenz kann sofort angegeben werden. Nach R. Sturm[1]) ist er $2 \cdot 2(2-1)(2-1)$, also auch

$$r = 4.$$

Später werden wir dafür einige direkte Beweise angeben.

2. Dagegen soll sofort die Frage nach den singulären Elementen erledigt werden. Für einen singu-

---

[1]) L. G. II, 300 S. 20.

lären Punkt müßten die beiden Kegel φ_1^2 und φ_2^2 identisch werden, da sie ja alle Mantellinien gemeinsam hätten. Im allgemeinen Falle kommen also keine derartigen Punkte vor.

Nur bei Ausartungen lassen sich solche feststellen. Zerfällt z. B. die durch die beiden Flächen gemeinsamen Tangentialebenen erzeugte abwickelbare Fläche φ^4 in 2 Kegel 2. Ordnung, so sind die Scheitel dieser Kegel singuläre Punkte 2. Ordnung. Berühren sich F_1^2 und F_2^2 in einem Punkte, so ist derselbe singulär, indem alle Strahlen des durch ihn und die zugehörige Tangentialebene bestimmten Büschels der Kongruenz angehören. Da aber jeder dieser Strahlen doppelt zu nehmen ist, so ist auch dieser Punkt singulär von der 2. Ordnung. Berühren sich F_1^2 und F_2^2 längs einer Kurve 2. Ordnung, so ist jeder Punkt dieser Kurve von der 2. Ordnung, der Mittelpunkt des gemeinsamen Berührungskegels aber singulär von der 4. Ordnung.

Artet ferner etwa F_2^2 in einen Kegel $\varkappa^2$ aus, so ist der Mittelpunkt von $\varkappa^2$ singulär von der 4. Ordnung, d. h. er ist Mittelpunkt eines doppelt zählenden Kegels 2. Ordnung. Oder artet F_2^2 in eine Kurve k^2 aus, so sind alle Punkte von k^2 singulär von der 2. Ordnung. Artet endlich F_2^2 in 2 sich schneidende Gerade aus, so ist jeder Punkt auf diesen Geraden von der 2., ihr Schnittpunkt aber von der 4. Ordnung singulär.

Dual dazu findet man singuläre Ebenen auch nur bei Ausartungen. Zerfällt die Schnittkurve f^4 von F_1^2 und F_2^2 in 2 Kegelschnitte, so sind die Trägerebenen dieser Kegelschnitte singulär von der 2. Klasse. Berühren sich F_1^2 und F_2^2 in einem Punkt, so ist die

Tangentialebene in diesem Punkte singulär von der 2. Klasse. Berühren sich F_1^2 und F_2^2 längs eines Kegelschnitts, so sind alle Tangentialebenen in den Punkten dieses Kegelschnitts von der 2. Klasse, die Trägerebene des letztern aber von der 4. Klasse singulär.

Geht F_2^2 in eine Kurve k^2 über, so ist die Ebene von k^2 von der 4. Klasse singulär; oder geht F_2^2 in einen Kegel $\varkappa^2$ über, so sind alle Tangentialebenen von $\varkappa^2$ singulär von der 2. Klasse. Zerfällt endlich F_2^2 in 2 Ebenenbüschel, deren Achsen sich schneiden, so ist jede Ebene, die zu einem der Büschel gehört, singulär von der 2., die beiden Büscheln gemeinsame Ebene aber singulär von der 4. Klasse.

3. Eine beliebige Gerade l des Raumes treffe F_1^2 in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, F_2^2 in $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$; die Tangentialebenen durch l an dieselben Flächen aber mögen in S_1 und S_1', bezw. S_2 und S_2' berühren. Die Strahlen unserer Kongruenz, die l treffen, erzeugen eine Regelfläche $m + n = 4 + 4 = 8$. Grades, die A^8 genannt werden soll und l zur vierfachen Leitgeraden hat.

Jede Ebene schneidet A^8 in einer Kurve 8. Ordnung. Geht die Ebene aber durch l, so zerfällt die Schnittkurve in die vierfach zu rechnende l und in die 4 in dieser Ebene liegenden Kongruenzstrahlen a, b, c, d.

Dual kann man von jedem Punkte des Raumes einen Kegel 8. Klasse an A^8 legen. Liegt der Punkt aber auf l, so zerfällt dieser Kegel in den vierfach zu nehmenden Ebenenbüschel l (π) und die 4 Ebenenbüschel 1. Klasse, die a', b', c', d' zu Achsen haben.

Zunächst mögen die Torsallinien der A^8 bestimmt werden. Sollen die 4 Kongruenzstrahlen a, b, c, d, die in einer Ebene des Büschels l (π) liegen, teilweise

zusammenfallen, so muß entweder einer der in einer solchen Ebene liegenden Kegelschnitte f_i^2 ausarten oder f_1^2 und f_2^2 müssen sich in einem Punkte berühren.

Der erstere Fall tritt ein, wenn π identisch wird mit einer der Ebenen $l(S_i)$ oder $l(S_i')$ $(i = 1,2)$. Für $\pi \equiv l(S_1)$ z. B. zerfällt f_1^2 in 2 reelle oder konj. imaginäre Gerade, die sich in S_1 schneiden. Die Tangenten von S_1 an f_2^2 mögen in Q_{11} bezw. Q_{12} berühren. Dann fallen 2 der in π liegenden Kongruenzstrahlen, etwa a und b mit S_1Q_{11} zusammen, während c und d mit S_1Q_{12} identisch werden. Analoges gilt von den Punkten S_1', S_2 und S_2'. Weitere Ausartungen von f_1^2 oder f_2^2 aber gibt es i. a. nicht.

Wenn andererseits für eine Ebene π f_1^2 und f_2^2 sich berühren sollen, so muß der Berührungspunkt auf der Schnittkurve f^4 von F_1^2 und F_2^2 liegen, und die f_1^2 und f_2^2 daselbst gemeinsame Tangente muß auch Tangente der f^4 sein. Nun gibt es aber 8 Tangenten an f^4, die l treffen, da f^4 vom 8. Range ist[1]). Seien die Schnittpunkte dieser Tangenten mit l $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ . . . $\mathfrak{A}_8$ und ihre Berührungspunkte mit f^4 A_1, A_2, . . . A_8 genannt. Dann fallen in den Ebenen $l(A_i)$ stets 2 Kongruenzstrahlen mit $\mathfrak{A}_iA_i$ zusammen, während die beiden andern i. a. reell oder auch konj. imaginär sind.

Eine gleiche Anzahl Torsallinien entsteht auf reziproke Art, also wenn entweder einer der zu einem Punkte P auf l gehörigen Kegel φ_i^2 ausartet oder wenn beide Kegel sich längs einer Erzeugenden berühren.

Fällt P etwa mit $\mathfrak{S}_1$ zusammen, so zerfällt φ_1^2

---

[1]) Salm.-Fiedl. G. d. R. II, Art. 110.

in die doppelt zu zählende Tangentialebene an F_1^2 in $\mathfrak{S}_1$, die aus dem zu $\mathfrak{S}_1$ gehörigen Kegel φ_2^2 2 Gerade ausschneidet. Dieselben sollen F_2^2 in T_{11} und T_{12} berühren, und die Tangentialebenen in diesen Punkten sollen τ_{11} und τ_{12} genannt werden. Es fallen alsdann mit $\mathfrak{S}_1 T_{11}$ und $\mathfrak{S}_1 T_{12}$ je 2 Kongruenzstrahlen zusammen. Ähnlich ist es in den Punkten $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$.

Ferner treffe l die abwickelbare Fläche φ^4 der gemeinsamen Tangentialebenen von F_1^2 und F_2^2 in den 8 Punkten $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ . . . $\mathfrak{B}_8$. Wird P mit einem der Punkte $\mathfrak{B}_i$ identisch, so haben dort φ_1^2 und φ_2^2 längs eines gemeinsamen Strahles auch die Tangentialebene gemeinsam. Dieselbe heiße β_i und ihre Berührungspunkte mit F_1^2 und F_2^2 seien B_{i_1} und B_{i_2}. In $B_{i_1} B_{i_2}$ sind dann 2 Strahlen unserer Konguenz vereinigt.

Die Fläche Λ^8 hat mithin

$$(4 + 4 + 8) + (4 + 4 + 8) = 32 \text{ Torsallinien,}$$

nämlich:

1. $S_1 Q_{11}$, $S_1 Q_{12}$, $S_1' Q_{11}'$, $S_1' Q_{12}'$.
2. $S_2 Q_{21}$, $S_2 Q_{22}$, $S_2' Q_{21}'$, $S_2' Q_{22}'$.
3. $\mathfrak{A}_1 A_1$, $\mathfrak{A}_2 A_2$, $\mathfrak{A}_3 A_3$, $\mathfrak{A}_4 A_4$, $\mathfrak{A}_5 A_5$, $\mathfrak{A}_6 A_6$, $\mathfrak{A}_7 A_7$, $\mathfrak{A}_8 A_8$.
4. $\mathfrak{S}_1 T_{11}$, $\mathfrak{S}_1 T_{12}$, $\mathfrak{S}_1' T_{11}'$, $\mathfrak{S}_1' T_{12}'$.
5. $\mathfrak{S}_2 T_{21}$, $\mathfrak{S}_2 T_{22}$, $\mathfrak{S}_2' T_{21}'$, $\mathfrak{S}_2' T_{22}'$.
6. $\mathfrak{B}_1 B_{11}$, $\mathfrak{B}_2 B_{21}$, $\mathfrak{B}_3 B_{31}$, . . . $\mathfrak{B}_8 B_{81}$.

Daraus ergeben sich sofort die Kuspidalpunkte und Kuspidalebenen der Λ^8.

a) Kuspidalpunkte:

1. Q_{11}, Q_{12}, Q_{11}', Q_{12}'.
2. Q_{21}, Q_{22}, Q_{21}', Q_{22}'.
3. A_1, A_2, A_3 . . . A_8.

4. $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$ je zweifach zu zählen.
5. $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ je zweifach zu zählen.
6. $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ . . . $\mathfrak{B}_8$.

b) Kuspidalebenen:

1. $l(S_1)$, $l(S_1')$ je zweifach zu zählen.
2. $l(S_2)$, $l(S_2')$ je zweifach zu zählen.
3. $l(A_1)$, $l(A_2)$ . . . $l(A_8)$.
4. τ_{11}, τ_{12}, τ_{11}', τ_{12}'.
5. τ_{21}, τ_{22}, τ_{21}', τ_{22}'.
6. β_1, β_2, β_3 . . . β_8.

Jede der Flächen F_i^2 wird von A^8 längs einer Kurve 8. Ordnung berührt. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer durch l gehenden Ebene π sind a) die Punkte $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i'$ als Doppelpunkte und b) die Berührungspunkte der Strahlen a, b, c, d in π mit f_i^2. Die Tangentialebenen der F_i^2 in den Punkten der genannten Kurve erzeugen die abwickelbare Fläche der A^8 und F_i^2 gemeinsamen Berührungsebenen; sie ist von 8. Klasse. Die 8 Tangentialebenen, die man von einem Punkte P auf l an diese abwickelb. Fläche legen kann, sind a) die doppelt zählenden Ebenen $l(S_i)$ und $l(S_i')$ und b) die 4 durch a', b', c', d' an F_i^2 gelegten Tangentialebenen.

4. Es mögen hier noch einige Ausartungen der A^8 angeführt werden.

a) Berühren sich F_1^2 und F_2^2 in einem Punkte C, so hat die Kurve f^4 daselbst einen Doppelpunkt. Infolgedessen fallen alsdann 2 der Torsallinien in die Gerade $\mathfrak{C}C$ zusammen, die gemeinsame Tangente an die in l(C) liegenden Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 in C. Passiert aber die erzeugende Ebene des Büschels $l(\pi)$ den Punkt C, so nimmt die Anzahl der in ihr liegenden Kongruenzstrahlen nicht um 2 zu oder ab; der

Strahl $\mathfrak{C}C$ ist also Doppelgerade der A^8. Ebenso fallen dual 2 der Torsallinien $\mathfrak{B}_i B_{i_1}$ in die Gerade $\mathfrak{C}'C$ zusammen, wenn $\mathfrak{C}'$ der Punkt ist, in welchem l die F_1^2 und F_2^2 in C berührende Ebene trifft. Auch $\mathfrak{C}'C$ ist eine Doppelgerade der A^8.

b) Berühren sich F_1^2 und F_2^2 in 2 Punkten C_1 und C_2, so artet natürlich f^4 entweder in eine Gerade und eine Kurve 3. Ordnung oder in 2 Kurven 2. Ordnung aus. Ebenso zerfällt φ^4 entweder in einen Ebenenbüschel 1. Klasse und eine abwickelbare Fläche 3. Klasse oder in 2 Ebenenbüschel 2. Klasse. Die Regelfläche A^8 hat dann 4 Doppelgerade, indem von den $\mathfrak{A}_i A_i$ und $\mathfrak{B}_i B_{i_1}$ je 2 Paare zusammenfallen.

c) Nun mögen sich F_1^2 und F_2^2 längs eines Kegelschnittes k^2 berühren. Die Ebene von k^2 sei $\varkappa$, der Pol von $\varkappa$ i. b. a. die beiden Flächen sei K, der Schnittpunkt von l mit $\varkappa$ sei L, und die beiden Schnittpunkte von l mit dem Kegel $K(k^2)$ seien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ genannt. Unsere Regelfläche wird dann — für sich betrachtet — vom 4. Grade; denn in jeder Ebene π durch l liegen nur 2 Strahlen und durch jeden Punkt P auf l gehen nur 2 Strahlen unserer Kongruenz, weil jede Ebene die Kurve k^2 nur in 2 Punkten trifft und von jedem Punkte des Raumes nur 2 Tangentialebenen an den Kegel $K(k^2)$ gelegt werden können. Die Regelfläche hat 4 Torsallinien; das eine Paar besteht aus den Tangenten von L an k^2, das andere Paar aus den Geraden $\mathfrak{T}_1 K$ und $\mathfrak{T}_2 K$. Geht l noch durch K, so zerfällt die Regelfläche in den Kegel $K(k^2)$ und in die beiden Strahlenbüschel $N_1(l)$ und $N_2(l)$, wo N_1 und N_2 die Punkte sind, in denen die Tangenten von L an k^2 die letztere Kurve berühren.

5. Am wichtigsten aber ist für uns der Fall, in welchem eine der Flächen, etwa F_2^2 in eine Kurve k^2 2. Klasse ausartet. Er sei etwas ausführlicher behandelt. Die Ebene von k^2 sei $\varkappa$, die Schnittkurve von F_1^2 mit $\varkappa$ sei e^2, der Schnittpunkt von l mit $\varkappa$ sei L. Die Schnittpunkte von k^2 und e^2 seien M_1, M_2, M_3, M_4. Die Tangenten von L an e^2 sollen in V_1 und V_2, die an k^2 in R_1 und R_2 berühren. Die Kurve f^4 artet hier aus in den zweifach zählenden Kegelschnitt e^2. Bei Bestimmung des Ranges von f^4 kommen aber zu e^2 noch die 4 Punkte M_i als Kurven 1. Klasse hinzu. Dagegen bleibt die Fläche φ^4 erhalten, enthält jedoch k^2 als Doppelkurve.

Was nun die Torsallinien der A^8 betrifft, so erkennt man sofort, daß S_1Q_{11}, S_1Q_{12}, $S_1'Q_{11}'$, $S_1'Q_{12}'$ und $\mathfrak{S}_1T_{11}$, $\mathfrak{S}_1T_{12}$, $\mathfrak{S}_1'T_{11}'$, $\mathfrak{S}_1'T_{12}'$ erhalten bleiben. Die Strahlen S_2Q_{21} . . . $S_2'Q_{22}'$ liegen in den Ebenen $l(R_1)$ und $l(R_2)$ und sind die Tangenten von R_1 und R_2 an die zugehörigen f_1^2. Dagegen fallen S_2T_{21} und S_2T_{22}' mit LV_1, $S_2'T_{21}'$ und $S_2'T_{22}'$ mit LV_2 zusammen. LV_1 und LV_2 sind also Doppelstrahlen der A^8. Von den Strahlen $\mathfrak{A}_iA_i$ fallen gleichfalls 4 paarweise mit LV_1 und LV_2 zusammen. Die übrigen liegen in den Ebenen $l(M_i)$ und fallen zusammen mit den Geraden $M_i\mathfrak{M}_i$, die F_1^2 in M_i berühren. Die Strahlen $\mathfrak{B}_iB_{i_1}$ dagegen bleiben erhalten.

Wir führen davon noch einige Spezialfälle an.

a) k^2 zerfalle in 2 Gerade g_1 und g_2, deren Schnittpunkt G sei. Dann zerfällt auch A^8 in 2 Regelflächen 4. Grades, A_1^4 und A_2^4; denn in jeder Ebene π durch l liegen 2 Strahlen, die F_1^2 berühren und g_1 treffen, und von jedem Punkte P auf l gehen gleichfalls 2 Strahlen aus, die F_1^2 berühren und g_1 treffen. Das

Gleiche gilt für g_2. Die Fläche A_i^4 hat also l und g_i zu zweifachen Leitgeraden. Sie hat 8 Torsallinien; 4 davon erzeugen die Tangentialebenen von l an F_1^2 und die Schnittpunkte von l mit F_1^2; die andern 4 erzeugt g_i auf dieselbe Art.

Von Interesse ist die Schnittkurve von A_1^4 mit A_2^4; sie ist von 16. Ordnung, zerfällt aber in mehrere Teilkurven. Zu ihr gehört l, die vierfach zählt, da sie ja Doppelgerade beider Regelflächen ist. Ferner gehören dazu die beiden Tangenten, die von G an F_1^2 gehen und l treffen. Endlich sind noch die beiden Strahlen LV_1 und LV_2 dazuzunehmen. Die Restkurve ist also noch von 8. Ordnung; sie wird hervorgerufen durch die Schnittpunkte der Erzeugenden von A_1^4 und A_2^4, die mit l in je einer Ebene π liegen. Da aber jede Ebene π nur 4 solcher Schnittpunkte erzeugt, so müssen 4 Punkte dieser Restkurve auf l selbst liegen.

b) Trifft l die Kurve k^2 in L, so zerfällt A^8 in den Berührungskegel von L an F_1^2 und in eine Regelfläche 6. Grades. Letztere wird von $\varkappa$ in der Doppelkurve k^2 und in den einfachen Strahlen LV_1 und LV_2 geschnitten. Liegt l ganz in der Ebene $\varkappa$, trifft also k^2 in 2 Punkten L_1 und L_2, so artet A^8 aus in die 2 Tangentialkegel von L_1 und L_2 an F_1^2 und in den doppelt zu rechnenden Strahlenbüschel 2. Klasse, der aus den Tangenten der Kurve e^2 besteht.

Die Eigenschaften der A^8 für den Fall, daß F_2^2 in einen Kegel K^2 ausartet, lassen sich aus dem Gesagten sofort angeben. Der Fall kann also übergangen werden.

6. Noch eine weitere Frage finde hier ihre Erledigung. Die beiden Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 haben

stets ein Polardreieck gemeinsam. Seine Seiten sind die Diagonalen des Vierseits, das die 4 Strahlen a, b, c, d in der Ebene π bilden. Wir bezeichnen die Verbindungslinie von (a, b) mit (c, d) durch k_1, von (a, c) mit (b, d) durch k_2, von (a, d) mit (b, c) durch k_3. Die den Seiten k_1, k_2, k_3 gegenüberliegende Eckpunkte des Dreiecks aber mögen K_1, K_2, K_3 heißen. Die Geraden k_i sind stets reell, wenn die Strahlen a, b, c, d entweder alle reell (und verschieden) oder alle imaginär sind. Ist nur 1 Paar dieser Strahlen reell, so ist auch nur eine Gerade k_i und nur der nicht auf ihr liegende Punkt K_i reell.

In einer der Ebenen $l(S_i)$, z. B. in $l(S_1)$, zerfällt nun f_1^2 in 2 reelle oder konj. imaginäre Gerade f_1' und f_1''. In dieser Ebene fällt ein Punkt K_i mit S_1 und eine Gerade k_i mit der Polaren von S_1 i. b. a. f_2^2 zusammen. Die beiden andern k_i aber gehen durch S_1 und sind die Strahlen, die sowohl durch f_1' und f_1'' als auch durch die Tangenten von S_1 an f_2^2 harmonisch getrennt sind. Das Dreieck $K_1K_2K_3$ bleibt also hier vollständig erhalten.

Anders in den Ebenen $l(A_i)$. Dort fallen 2 der Strahlen k_i mit der f_1^2 und f_2^2 in A_i gemeinsamen Tangente zusammen. Die 3. Gerade k_i aber ist die Verbindungslinie von A_i mit dem Schnittpunkt der beiden übrigen Tangenten von f_1^2 und f_2^2. Von den Punkten K_i fallen 2 nach A_i, der 3. aber liegt gleichfalls auf der Tangente in A_i und ist von diesem Punkt harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte besagter Tangente mit den übrigen f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Tangenten.

Wenn nun die Ebene π um die beliebige Gerade l einen Büschel beschreibt, so fragen wir uns

1. Welche Kurve beschreiben die Punkte K_i?

2. Welche Regelfläche erzeugen die Geraden k_i?

Jedem Punkte C auf l entsprechen 2 Ebenen γ_1 und γ_2, die seine Polarebenen i. b. a. F_1^2 und F_2^2 sind. Beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden g. In der Ebene C(g) aber ist g die Polare von C i. b. a. die beiden aus F_1^2 und F_2^2 ausgeschnittenen Kegelschnitte. Soll l auch in der Ebene C(g) liegen, was der Fall sein muß, wenn C ein Punkt K_i sein soll, so müssen g und l sich schneiden. Durchläuft nun C die Punktreihe l, so beschreiben γ_1 und γ_2 2 projektive Büschel, g erzeugt also eine Regelschar 2. Grades. Da letztere aber 2 Erzeugende besitzt, die l treffen, so gibt es auf l auch 2 Punkte K_i. Man findet sie, indem man die Doppelpunkte der projektiven Punktreihen zeichnet, welche die Ebenenbüschel γ_1 und γ_2 auf l ausschneiden.

Da mithin in einer Ebene π außer den 3 zugehörigen Punkten K_i noch 2 mit l inzidente liegen, so muß die Kurve der K_i von $3 + 2 = 5$. Ordnung sein; sie sei daher k^5 genannt.

Die 10 Punkte, in denen k^5 die Flächen F_i^2 trifft, lassen sich nach Obigem sofort angeben. Es sind die Punkte

$$S_i,\ S_i',\ A_1,\ A_2\ \ldots\ A_8.$$

In all diesen Punkten durchdringt k^5 die Fläche F_i^2. In den Punkten A_i aber ist diejenige k_i eine Tangente an k^5, die nicht mit der f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Tangente zusammenfällt. k^5 geht auch durch die Eckpunkte des Poltetraeders, das F_1^2 und F_2^2 gemeinsam haben.

Bei Beantwortung der 2. Frage kann man zunächst bemerken, daß in jeder Ebene π durch l i. a.

3 Erzeugende k_i der Regelfläche liegen. Die Polarebenen γ_1 und γ_2 eines Punktes C auf l sollen sich wieder in g schneiden. Jedem Punkte E auf g entsprechen dann wieder 2 Ebenen ε_1 und ε_2, die seine Polarebenen sind und aus der Ebene $l(E) \equiv \varepsilon_3$ 2 Strahlen e_1 und e_2 ausschneiden. Wird für irgendeine Ebene ε_3 $e_1 \equiv e_2$, so ist dieser Strahl eine Erzeugende unserer Regelfläche.

Durchläuft nun E die Gerade g, so beschreiben ε_1 und ε_2 Ebenenbüschel um die Polaren g_1 und g_2 von g i. b. a. F_1^2 und F_2^2. Da aber g_1 und g_2 sich in C schneiden, so haben wir 3 projektive Ebenenbüschel, deren Achsen durch C gehen, nämlich:

$$g_1(\varepsilon_1) \overline{\wedge} g_2(\varepsilon_2) \overline{\wedge} l(\varepsilon_3).$$

Die Schnittgeraden entsprechender Ebenen dieser Büschel erzeugen daher 3 Kegel mit C als Scheitel und zwar sollen $g_1(\varepsilon_1)$ und $g_2(\varepsilon_2)$ den Kegel $\varkappa_3^2$, $g_2(\varepsilon_2)$ und $l(\varepsilon_3)$ den Kegel $\varkappa_2^2$, $l(\varepsilon_3)$ und $g_1(\varepsilon_1)$ den Kegel $\varkappa_1^2$ erzeugen.

Die Kegel $\varkappa_1^2$ und $\varkappa_2^2$ schneiden sich in der Geraden l und außerdem noch in 3 durch P gehenden Strahlen. Da sich aber in einer solchen Geraden eine ε_3 mit je einer entsprechenden ε_1 und einer ε_2 schneidet, so schneiden sich dort auch 2 entsprechende Ebenen ε_1 und ε_2, d. h. auch der Kegel $\varkappa_3^2$ enthält diese 3 Gerade. Und eben diese 3 Strahlen sind es, die wir suchen; denn legt man durch einen von ihnen und l die Ebene ε_3, so fallen in ihr tatsächlich e_1 und e_2 zusammen.

Durch jeden Punkt C auf l gehen also i. a. 3 Erzeugende der Fläche; diese ist daher von $3+3=6$. Grade und sei K^6 genannt. Sie enthält l als dreifache und k^5 als zweifache Leitlinie.

Die acht Geraden $\mathfrak{A}_i A_i$ sind Torallinien der K^6.

Die auf reziproke Art entstehenden Gebilde lassen sich aus dem Gesagten sofort feststellen. Die zu einem Punkte P auf l gehörigen Tangentialkegel $\varkappa_1^2$ und $\varkappa_2^2$ haben ein gemeinsames Polardreikant. Es seien die Schnittgeraden der Ebenen (a'b') und (c'd') mit q_1, (a'c') und (b'd') mit q_2, (a'd') und (b'c') mit q_3 bezeichnet. Die den q_i gegenüberliegenden Ebenen des Dreikants aber mögen bezw. σ_1, σ_2, σ_3 heißen.

Dann umhüllen die Ebenen σ_i einen Torsus 5. Klasse, Σ^5, der mit F_i^2 die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i'$ und die Ebenen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_8$ gemeinsam hat. Die von den q_i erzeugte Regelfläche ist vom 6. Grade; sie heiße Q^6. Die Geraden $\mathfrak{B}_i B_{i_1}$ sind Torsallinien von ihr.

7. Eine wichtige Ausartung der Gebilde k^5 und K^6 tritt ein, wenn l durch einen Eckpunkt des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Poltetraeders $R_1R_2R_3R_4$ geht. Es gehe l etwa durch R_1. Die Polarebene von R_1 sei ϱ_1, der Schnittpunkt von l mit ϱ_1 sei $\mathfrak{L}$ und die beiden Schnittkurven von ϱ_1 mit F_1^2 und F_2^2 seien bezw. k_{11}^2 und k_{12}^2.

Für eine Ebene π durch l fällt dann i. a. einer der Punkte K_i, etwa K_1 nach R_1, während die beiden andern, K_2 und K_3 auf der Schnittgeraden r_1 von π mit ϱ_1 liegen. Sind K_{11} und K_{11}', K_{12} und K_{12}' die Schnittpunkte von r_1 mit k_{11}^2 und k_{12}^2, so sind K_2 und K_3 die Punkte auf r_1, die sowohl durch K_{11} und und K_{11}' als auch durch K_{12} und K_{12}' harmonisch getrennt sind[1]). Beschreibt nun π einen Büschel um l, also r_1 einen Strahlenbüschel, so erzeugen die Punkte K_2 und K_3 eine Kurve k^3 3. Ordnung. Man kann

[1]) Reye, G. d. L. I. S. 257.

dies so beweisen. Ist g eine bel. Gerade in ϱ_1, so entspricht jedem Punkte A auf g i. a. ein Punkt A_1, der Schnittpunkt seiner Polaren i. b. a. k_{11}^2 und k_{12}^2, in der Weise, daß die auf dem Strahl $AA_1 \equiv g_1$ liegenden Punkte von k_{11}^2 wie von k_{12}^2 durch A und A_1 harmonisch getrennt sind. Beschreibt nun A die Punktreihe g, so beschreibt g_1 einen Strahlenbüschel 3. Klasse[1]). Drei Strahlen dieses Büschels gehen also durch $\mathfrak{L}$. Sie schneiden g in den Punkten der Kurve k^3. Auch $\mathfrak{L}$ liegt auf k^3; ihm entspricht als zweiter Punkt der Schnittpunkt $K_{\mathfrak{L}}$ seiner Polaren i. b. a. k_{11}^2 und k_{12}^2. Der Strahl $\mathfrak{L}K_{\mathfrak{L}}$ aber ist Tangente an k^3 in $\mathfrak{L}$.

Die Kurve k^3 geht durch die Berührungspunkte der Tangenten von $\mathfrak{L}$ an k_{11}^2 und k_{12}^2 und durch die 4 Schnittpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 dieser Kurven. Die Geraden $\mathfrak{L}M_i$ aber sind Tangenten an k^3 in M_i.

Die Schnittkurve k^4 von F_1^2 und F_2^2 wird von R_1 aus durch einen Doppelkegel 2. Grades projiziert. Legt man durch $\mathfrak{L}$ an diesen Kegel R_1 (k^4) die beiden Tangentialebenen, so berühren sich die in diesen Ebenen liegenden Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 in zwei Punkten A_1 und A_1' (bezw. A_2 und A_2'). Die gemeinsamen Tangenten in A_i und A_i' mögen sich in einem Punkte N_i schneiden, der natürlich in ϱ_1 liegt. Einer der Punkte K_i fällt hier mit N_i, die ihm zugeordneten Gerade k_i mit $A_iA_i' \equiv n_i$ zusammen. Da aber f_1^2 und und f_2^2 in diesem Falle unendlich viele gemeinsame Polardreiecke haben, so erzeugen die beiden übrigen K_i die Punktreihe n_i, während die zugehörigen k den Strahlenbüschel N_i (n_i) beschreiben. Also gehören die Geraden n_1 und n_2 selbst zur Kurve k^5.

---

[1]) Reye, G. d. L. I. S. 278 ff.

Auf l liegen infolgedessen jetzt 3 Punkte der k^5, nämlich R_1 als Doppelpunkt und $\mathfrak{L}$. Bemerkenswert ist noch, daß die in 6. angegebene Regelschar, die uns angibt, wieviel Punkte von k^5 auf l liegen, hier in einen Kegel ausartet, dessen Scheitel $K_\mathfrak{L}$ ist, der $K_\mathfrak{L}R_1$ als Erzeugende enthält und ϱ_1 längs der Geraden $K_\mathfrak{L}\mathfrak{L}$ berührt.

Die Fläche K^6 zerfällt hier in die Strahlenbüschel $\mathfrak{L}(\varrho_1)$, $N_1(n_1)$, $N_2(n_2)$ und den Kegel 3. Ordnung $R_1(k^3)$.

Reziprok dazu haben wir: Fällt l in eine Ebene des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polarvierflaches $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4$, etwa in ϱ_1, so artet die abwickelbare Fläche Σ^5 aus in 2 Ebenenbüschel 1. Klasse und einen Kegel 3. Klasse. Die Achsen der Ebenenbüschel sind die beiden Tangenten n_1 und n_2 in den Punkten N_1 und N_2, in welchen l die in ϱ_1 liegende Doppelkurve der abwickelbaren Fläche φ^4 schneidet. Der Scheitel des Kegels aber ist der Pol R_1 von ϱ_1. Die Regelfläche Q^6 zerfällt in 3 Strahlenbüschel 1. Grades und einen Strahlenbüschel 3. Klasse. Letzterer ist der Schnitt von ϱ_1 mit dem zu Σ^5 gehörigen Kegel 3. Klasse.

8. Ähnlich ist die Ausartung von k^5, wenn F_2^2 in einen Kegelschnitt k^2 übergeht. Behalten wir die Bezeichnung von 5. bei. Einer der Strahlen k_i beschreibt auch hier einen Büschel um $\mathfrak{L}$ in der Ebene $\varkappa$ und die auf ihm liegenden Punkte K_i eine Kurve k^3 3. Ordnung, die diesmal durch k^2 und e^2 hervorgerufen wird. Setzen wir fest, daß der in $\varkappa$ liegende Strahl k_i mit k_1 bezeichnet werde, so haben wir noch zu untersuchen, welche Kurve K_1 beschreibt. Da er der Pol von k_1 i. b. a. f_1^2 ist, so muß er auf der Polaren $\mathfrak{k}_1$ von k_1 liegen. Beschreibt aber k_1 seinen Büschel, so erzeugt $\mathfrak{k}_1$ einen dazu projektiven Büschel, dessen

Träger der Pol K von $\varkappa$ und die Polarebene λ von $\mathfrak{L}$ i. b. a. F_1^2 sind. K_1 ist dann der Schnittpunkt der Ebene π mit dem zugehörigen Strahl $\mathfrak{k}_1$. Er beschreibt mithin einen Kegelschnitt $\mathfrak{k}^2$, der in der Ebene λ liegt. Derselbe geht durch K und trifft l in dem Punkte L, in welchem l die Ebene λ schneidet. Die Kurve k^3 wird von $\mathfrak{k}^2$ in den Punkten V_1 und V_2 getroffen, welche die Berührungspunkte der Tangenten an e^2 von $\mathfrak{L}$ sind. Ferner durchdringt $\mathfrak{k}^2$ die Fläche F_1^2 in V_1, V_2, S_1 und S_1'.

Die Regelfläche K^6 zerfällt hier in den Strahlenbüschel, dessen Träger $\mathfrak{L}$ und $\varkappa$ sind und eine Restfläche K^5 5. Grades.

Anmerkung: Daß die Restfläche vom 5. Grade ist, läßt sich unabhängig von 6. auch mit Hilfe der Formeln nachweisen, die von C. Wiener[1]) und W. Fiedler[2]) angegeben sind.

Es ist hier:

$$\begin{array}{lll} l_1 = l & m_1 = 1 & s_1 = 2 \\ l_2 = \mathfrak{k}^2 & m_2 = 2 & s_2 = 1 \\ l_3 = k^3 & m^3 = 3 & s_3 = 1. \end{array}$$

Daher:

$$\begin{aligned} n &= 2m_1m_2m_3 - s_1m_1 - s_2m_2 - s_3m_3 \\ n &= 2\cdot1\cdot2\cdot3 - 2\cdot1 - 1\cdot2 - 1\cdot3 \\ n &= 12 - 2 - 2 - 3 \\ n &= 5. \end{aligned}$$

Die Vielfachheit der Leitkurven ist dann:

$$\begin{array}{lll} n_1 = m_2m_3 - s_1 & n_2 = m_3m_1 - s_2 & n_3 = m_1m_2 - s_3 \\ n_1 = 2\cdot3 - 2 & n_2 = 3\cdot1 - 1 & n_3 = 1\cdot2 - 1 \\ n_1 = 4 & n_2 = 2 & n_3 = 1. \end{array}$$

[1]) Wiener, D. G. II. S. 420.

[2]) Fiedler, D. G. II. S. 412, 413.

Die Ergebnisse für n_2 und n_3 kann man leicht nachprüfen, indem man durch l eine Ebene legt. Daß $n_1 = 4$ ist erkennt man, indem man von einem Punkte P auf l die Kegel $P(\mathfrak{k}^2)$ und $P(k^3)$ zeichnet; sie haben 6 Strahlen gemeinsam, zu denen aber auch PV_1, PV_2 und $l = P\mathfrak{L} = PL$ gehören. Die beiden ersteren, PV_1 und PV_2 liegen nicht auf K^5 und sind daher in Abzug zu bringen. l dagegen zählt mit, weil sie ganz auf K^5 liegt. Doch ist l nur dreifache Leitlinie, d. h. K^5 durchdringt sich längs l nur zweimal. $\mathfrak{k}^2$ ist eine zweifache und k^3 eine einfache Leitlinie der K^5.

Artet reziprok F_2^2 in einen Kegel K^2 mit dem Scheitel K aus, so zerfällt Σ^5 in einen Kegel K^3 3. Klasse mit dem Scheitel in K und einem Kegel $\mathfrak{K}^2$ 2. Klasse, der den Pol der Ebene $l(K)$ i. b. a. F_1^2 als Scheitel hat. Die Regelfläche Q^6 aber artet aus in einen Strahlenbüschel 1. Grades mit K und der Ebene $l(K)$ als Trägern und eine Restfläche Q^5 5. Grades.

9. Endlich sei noch kurz der Fall behandelt, da beide Flächen F_i in Kegelschnitte ausarten. Dieselben seien k_1^2 und k_2^2, ihre Ebenen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, die Schnittgerade von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sei k. Ferner treffe l die Ebenen $\varkappa_i$ in $\mathfrak{L}_i$, k die Kurven k_i^2 in W_i und W_i', und die Tangenten von $\mathfrak{L}_i$ an k_i^2 mögen in R_i und R_i' berühren. Die Ebene π aber treffe k_i^2 in K_i und K_i'. Es ergibt sich, daß hier zwei der Strahlen k_i, sagen wir k_1 und k_2 mit den Schnittgeraden von π und $\varkappa_1$ bezw. $\varkappa_2$ identisch sind. Beschreibt also π einen Büschel, so erzeugt K_3 die Punktreihe k. Die Punkte K_2 und K_3 aber erzeugen Kegelschnitte. Ist nämlich $\mathfrak{K}_1$ der Pol von k i. b. a. k_1^2 und $\mathfrak{k}_1$ die Polare von K_3 i. b. a. dieselbe Kurve, so ist K_2, da er von K_3 harmonisch getrennt ist durch die K_1 und K_1', auf

k_1 gelegen und zugleich auf $\mathfrak{k}_1$. Beschreibt nun K_3 die Punktreihe k, so beschreiben k_1 und $\mathfrak{k}_1$ 2 projektive Strahlenbüschel, ihr Schnittpunkt K_2 also einen in $\varkappa_1$ liegenden Kegelschnitt $\mathfrak{k}_1^2$, der durch die Punkte $\mathfrak{L}_1$, R_1, R_1', W_1 und W_1' geht. Desgleichen erzeugt K_1 in der Ebene $\varkappa_2$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{k}_2^2$.

Zur Fläche K^6 gehören hier zunächst die beiden Strahlenbüschel $\mathfrak{L}_1(k)$ und $\mathfrak{L}_2(k)$, die von k_1 und k_2 erzeugt werden. k_3 aber beschreibt eine Regelfläche 4. Grades, bestehend aus allen Geraden, die l, $\mathfrak{k}_1^2$ und $\mathfrak{k}_2^2$ treffen, wenn man hiervon die beiden Kegel $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{k}_2^2)$ und $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{k}_1^2)$ in Abzug bringt.

Die reziproken Gebilde ergeben sich aus dem Gesagten von selbst.

10. Die beiden Regelflächen A^8 und K^6 können wir nun benützen, um den Rang unserer Kongruenz festzustellen, indem wir die Schnittkurve beider Flächen untersuchen. Dieselbe muß von $8 \cdot 6 = 48$. Ordnung sein, zerfällt aber in mehrere Teilkurven. Vor allen Dingen ist die Gerade l selbst vierfache Gerade von A^8 und dreifache Gerade von K^6. Die Tangentialebenen beider Flächen in den einzelnen Punkten von l sind aber i. a. voneinander verschieden. l hat also im ganzen als $4 \cdot 3 = 12$fache Schnittlinie zu gelten. Ferner haben A^8 und K^6 die 8 Torsallinien $\mathfrak{A}_i A_i$ gemeinsam. Da aber auch die zu diesen Linien gehörigen Kuspidalebenen beider Flächen identisch sind, so berühren sie sich einfach längs dieser Linien. Sonst gibt es keine Gerade mehr, die beiden Flächen zugleich angehören. Der Restschnitt aber wird erzeugt durch die Schnittpunkte der Strahlen a, b, c, d, die in den Ebenen π liegen, weil ja die k_i die Verbindungslinien je zweier dieser Punkte sind. Diese Kurve ist aber eine Doppelkurve von A^8.

Ihre Ordnung ist also $(48 - 12 - 2 \cdot 8) : 2 = 10$. Da nun eine Ebene des Büschels $l(\pi)$ $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Punkte dieser Kurve erzeugt (die nicht auf l liegen), so müssen auf l selbst 4 Punkte derselben liegen. Das heißt aber, es gibt 4 Paare von Kongruenzstrahlen, die mit l in je einer Ebene liegen und sich zugleich in einem Punkte von l schneiden; der Rang unserer Kongruenz ist also

$$r = 4.$$

11. Direkt können wir den Rang auch auf folgende Art bestimmen. Die 4 Kongruenzstrahlen a, b, c, d, die mit l in einer Ebene π liegen, mögen l bezw. in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ schneiden. Von jedem dieser Punkte aus kann man noch 3 weitere Strahlen unserer Kongruenz ziehen. Legt man durch je einen von ihnen und durch l noch eine Ebene, so werden dadurch der Ebene π im ganzen $4 \cdot 3 = 12$ Ebenen zugeordnet. Beschreibt also π um l einen Büschel, so ruft sie eine involutorische Korrespondenz [12] hervor. Wir suchen die 24 Koinzidenzebenen. In erster Linie werden dieselben erzeugt durch solche Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auf l, für welche 2 der von ihnen ausgehenden Kongruenzstrahlen identisch werden. Diese sind uns aber bereits aus 3. bekannt. Es sind die Punkte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_8$, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_2'$. Dabei rufen aber die letzten 4 Punkte je 2 Koinzidenzebenen hervor. Die 16 in Betracht kommenden Ebenen sind also:

a) $l(B_{11})$, $l(B_{21})$ . . . . . $l(B_{81})$
b) $l(T_{11})$, $l(T_{12})$, $l(T_{11}')$, $l(T_{12}')$
c) $l(T_{21})$, $l(T_{22})$, $l(T_{21}')$, $l(T_{22}')$.

Die übrigen Koinzidenzebenen werden nur hervorgerufen durch Punkte, für welche 2 der von ihnen

zugeordneten Strahlen der Kongruenz mit l in einer Ebene liegen. Nun ist aber eine solche Ebene stets doppelt zu zählen, da sie mit 2 der ihr entsprechenden zusammenfällt[1]). Also kann es nur noch 4 derartige Ebenen geben. Dies besagt aber nichts anderes, als daß der Rang der Kongruenz $r = 4$ ist.

Die letztere Art, den Rang festzustellen, führt uns unmittelbar zu der Brennfläche unserer Kongruenz[2]). Wir haben hier zu unterscheiden zwischen der Punkt-Brennfläche $\Phi(F)$ und der Ebenen Brennfläche $\Phi(\varphi)$. Die Ordnung von $\Phi(F)$ ist

$$\begin{aligned} m_1 &= 2n(m-1) - 2r \\ m_1 &= 2 \cdot 4 \cdot 3 \quad - 8 \\ m_1 &= 16. \end{aligned}$$

Die oben erwähnten Punkte $\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_8$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ aber sind die Treffpunkte von l mit $\Phi(F)$. Dabei sind die 4 letzten wieder zweifach zu nehmen. $\Phi(F)$ besteht infolgedessen aus den beiden doppelt zählenden Flächen F_1^2 und F_2^2 und aus der abwickelbaren Fläche φ^4, letztere als Punktort 2. Stufe betrachtet. Dual dazu ist die Fläche $\Phi(\varphi)$ von $n_1 = 2m(n-1) - 2r = 16$. Klasse. Zu ihr gehören gleichfalls F_1^2 und F_2^2, auch hier zweifach zählend, und außerdem noch die Kurve f^4, diese als Ebenenort 2. Stufe aufgefaßt[3]).

12. Die 4 durch einen Punkt P gehenden Kongruenzstrahlen a', b', c', d' können paarweise durch 6 Ebenen verbunden werden. Es sei immer $\pi_1 = (a'b')$, $\pi_2 = (a'c')$, $\pi_3 = (a'd')$, $\pi_4 = (b'c')$, $\pi_5 = (b'd')$, $\pi_6 =$

[1]) Sturm, L. G. II. S. 20.
[2]) Ebenda S. 5 ff.
[3]) Ebenda S. 14, 15.

(c'd'). Ordnet man P diese 6 Ebenen π_i zu, so erhält man ein Nullsystem, dessen 1. Charakteristik

$$\alpha = 6$$

ist.

Ebenso schneiden sich, wie schon in 10. erwähnt, die 4 in einer Ebene π liegenden Kongruenzstrahlen paarweise in 6 Punkten. Es sei auch hier $P_1 = (ab)$, $P_2 = (ac)$, $P_3 = (ad)$, $P_4 = (bc)$, $P_5 = (bd)$, $P_6 = (cd)$. D. h. auch jeder Ebene sind 6 Punkte unseres Nullsystems zugeordnet, seine 2. Charakteristik ist gleichfalls

$$\beta = 6.$$

Die 3. Charakteristik ist aber ja gleich dem Range unserer Kongruenz, also

$$\gamma = 4.$$

Die Eigenschaften dieses Nullsystems sollen im folgenden eingehend untersucht werden.

II. Kapitel.

Der Ort der Nullpunkte des Ebenenbüschels 1(π) und die durch die Nullebenen der Punktreihe 1(P) erzeugte abwickelbare Fläche.

13. Umhüllt allgemein die Ebene π eine abwickelbare Fläche μ-ter Klasse, so erzeugen die ihr zugeordneten Punkte P_i eine Kurve, deren Ordnung $(\beta + \gamma) \cdot \mu = (6 + 4)\,\mu = 10\,\mu$ ist. Und beschreibt der Punkt P eine Kurve r-ter Ordnung, so umhüllen seine Nullebenen π_i eine abwickelbare Fläche $(\alpha + \gamma) \cdot \nu = (6 + 4)\ \nu = 10\,\nu$-ter Klasse[1]). Wir wollen haupt-

[1]) Ameseder, Crelles Journal, Bd. 97, S. 64.

sächlich die Fälle untersuchen, in welchen μ und ν gleich 1 oder gleich 2 werden.

Beschreibt also π einen Büschel mit der Achse l, so erzeugen die zugehörigen Punkte P_i eine Kurve 10. Ordnung; sie sei l^{10} genannt. Es ist dies dieselbe Kurve, mit deren Hilfe wir in 10. den Rang unseres Nullsystems bestimmt haben. Wir wollen ihre Eigenschaften hier näher darlegen. Die Reellität der Punkte P_i, die in einer Ebene π des Büschels liegen, ist natürlich davon abhängig, ob die Strahlen a, b, c, d in ihr reell sind oder nicht. Sind alle 4 Strahlen reell und verschieden, so sind auch sämtliche P_i reell und verschieden; hierzu ist notwendig, daß die Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 reell werden und sich in 4 reellen bezw. 4 imaginären Punkten schneiden. Wird 1 Paar der Strahlen a, b, c, d konj. imaginär, so bleibt nur noch ein Paar der Punkte P_i reell, nämlich der Schnittpunkt der beiden reellen und der Schnittpunkt der beiden konj. imaginären Strahlen. Die übrigen 4 aber liegen als paarweise konj. imaginäre Punktepaare auf den reellen Strahlen. Dieser Fall tritt ein, wenn f_1^2 und f_2^2 zwar reell sind, sich aber nur in 2 reellen Punkten schneiden. Werden alle 4 Strahlen a, b, c, d paarweise konj. imaginär, so werden ebenfalls nur 2 der Punkte P_i reell, nämlich die Schnittpunkte der konj. imaginären Strahlen. Die übrigen P_i werden paarweise konj. imaginär. Die Träger der 3 Punktpaare aber sind diesmal die 3 reellen Seiten des den Kegelschnitten f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Polardreiecks. Möglich ist dies, wenn entweder eine der Kurven f_i^2 oder auch alle beide imaginär sind oder im Falle der Reellität, wenn sie sich in keinem reellen bezw. in 4 reellen Punkten schneiden.

Fällt 1 Paar der Strahlen zusammen, so ist der Berührungspunkt dieses Strahles ein Punkt P_i. Von den übrigen Punkten fallen 2 Paare zusammen und zwar nach den Schnittpunkten des erwähnten Strahles mit den beiden übrigen Strahlen. Ob diese Punkte reell sind, hängt von der Beschaffenheit der f_i^2 ab. Der 6. Punkt P_i aber, nämlich der Schnittpunkt der beiden nicht zusammenfallenden Strahlen, ist sicher reell. Da sich f_1^2 und f_2^2 hier berühren müssen, so kann dieser Fall nur in den Ebenen $l(A_i)$ eintreten.

Fällt auch das andere Paar der Strahlen a, b, c, d noch zusammen, so fallen 4 Punkte P_i nach dem Schnittpunkt der beiden „Doppelstrahlen", die beiden übrigen aber sind die Berührungspunkte dieser Strahlen mit dem nicht zerfallenden Kegelschnitt f_i^2. Diese Ausartung tritt i. a. nämlich nur dann ein, wenn eine der Kurven f_i in 2 Gerade zerfällt, also in den Ebenen $l(S_1)$, $l(S_1')$, $l(S_2)$, $l(S_2')$. Die durch einen solchen Punkt S_i gehenden Seiten des zugehörigen, beiden f_i^2 gemeinsamen Polardreiecks sind Tangenten der Kurve l^{10} in den Punkten S_i.

Andere Lagen der Punkte P_i sind im allgemeinen Falle nicht zu verzeichnen.

Wir können daher von l^{10} folgende grundlegende Eigenschaften angeben:

a) Sie ist der Ort der Punkte, in denen die Ebenen des Büschels $l(\pi)$ die Fläche A^8 berühren.

b) Mit l hat sie 4 Punkte, I_1, I_2, I_3, I_4 gemeinsam.

c) In den Ebenen $l(S_i)$ und $l(S_i')$, sowie in den Ebenen $l(A_i)$ liegen je 2 Tangenten der Kurve.

d) Die Punkte S_1, S_1' S_2, S_2' sind Doppelpunkte von l^{10}.

e) Die Fläche F_1^2 wird von l^{10} in S_1 und S_2 je

zweifach berührt und in den Punkten Q_{21}, Q_{22}, Q_{21}', Q_{22}' A_1, $A_2 \ldots A_8$ durchdrungen. Für F_2^2 gilt Analoges.

14. Dual hierzu können wir sagen: Durchläuft der Punkt P die gerade Punktreihe l, so umhüllen die zugehörigen Nullebenen π_i einen Torsus von 10. Klasse, der T^{10} heißen möge. Er hat folgende Eigenschaften:

a) T^{10} wird erzeugt von der Gesamtheit aller Ebenen, die A^8 in Punkten der l berühren.

b) Mit dem Büschel l(π) hat er 4 Ebenen gemeinsam, die durch die Punkte I_1, I_2, I_3, I_4 hervorgerufen werden.

c) Die Punkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_8$, $\mathfrak{S}_1$, S_1', $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ sind Doppelpunkte der Rückkehrkante von T^{10}.

d) Die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i'$ an F_i^2 sind zweifache Tangentialebenen an T^{10}.

e) Unter den π_i gibt es $2 \cdot 10 = 20$, die Tangentialebenen an F_1^2 sind, nämlich: die Berührungsebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ je vierfach, die Berührungsebenen in B_{11}, B_{12}, $B_{13} \ldots B_{18}$ und ebenso die Berührungsebenen in T_{21}, T_{22}, T_{21}', T_{22}' je einfach. Ähnliches ergibt sich für die Fläche F_2^2.

15. Es seien jetzt einige Ausartungen der Gebilde l^{10} und T^{10} angeführt.

a) F_1^2 und F_2^2 mögen sich in einem Punkte C berühren — gemeinsame Tangentialebene γ —, ohne daß eine der beiden Flächen ausartet. Dann werden sich in der Ebene l(C) die Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 berühren. C muß also ein Punkt der l^{10} sein. Passiert aber die Ebene π den Punkt C, so wird nach 4a) die Anzahl der Kongruenzstrahlen a, b, c, d und daher auch die Zahl der reellen Punkte P_i weder vermehrt noch vermindert. Die Ebene l(C) berührt also die l^{10}

nicht, sondern enthält 2 Doppelpunkte der Kurve. In C aber berührt l^{10} sowohl F_1^2 als auch F_2^2.

Ebenso ist die Ebene γ eine Tangentialebene des Torsus T^{10}. Trifft aber γ die Gerade l in $\mathfrak{C}'$, so ist $\mathfrak{C}'$ nicht etwa ein Punkt der Rückkehrkante von T^{10}, sondern er erzeugt 2 Doppeltangentialebenen an diese Fläche.

b) Berühren sich F_1^2 und F_2^2 in 2 Punkten C_1 und C_2 und heißen ihre gemeinsamen Tangentialebenen daselbst γ_1 und γ_2, so berührt l^{10} die Flächen F_1^2 und F_2^2 in C_1 und C_2 und enthält außer S_i und S_i' noch 4 weitere Doppelpunkte, die paarweise in den Ebenen $l(C_1)$ und $l(C_2)$ liegen. Die Fläche T^{10} aber berührt gleichfalls F_1^2 und F_2^2 in C_1 und C_2 und enthält 4 neue zweifache Tangentialebenen, die von den Treffpunkten von γ_1 und γ_2 mit l erzeugt werden.

c) Berühren sich F_1^2 und F_2^2 längs des Kegelschnitts k^2, der in der Ebene $\varkappa$ liegt, so gehört k^2 selbst zur Kurve l^{10}, indem für jede Ebene π 2 Punkte P_i mit den Schnittpunkten K_1 und K_2 von π und k^2 identisch werden. Die übrigen 4 Punkte P_i aber fallen stets in einen Punkt zusammen, nämlich in den Schnittpunkt P der Tangente in K_1 und K_2 an f_1^2 und f_2^2. Da P aber der Pol von K_1K_2 k ist i. b. a. f_1^2 oder f_2^2, so beschreibt er nach 8. einen Kegelschnitt f^2, der in der Polarebene λ des Schnittpunktes $\mathfrak{L}$ von l und $\varkappa$ liegt, durch den Pol K von $\varkappa$ geht und l in einem Punkte L trifft. Die Fläche F_1^2 wird von ihm in S_1 und S_1' und außerdem noch in den 2 Punkten N_1 und N_2 durchdrungen, in welchen die Tangenten von $\mathfrak{L}$ an k^2 berühren. Das Gleiche gilt für F_2^2. f^2 zählt natürlich vierfach. Geht l noch durch den Pol K von $\varkappa$, so zerfällt f^2 in die beiden Geraden KN_2 und KN_2.

Für jede Ebene π durch l schneiden sich dann nämlich die f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Tangenten in K. In den Ebenen $l(N_1)$ und $l(N_2)$ aber fallen beide Tangenten mit der Geraden KN_1 bezw. KN_2 zusammen, so daß jeder Punkt dieser Geraden als Schnittpunkt gelten kann.

Der Torsus T^{10} zerfällt hier analog in den Kegel 2. Klasse $K(k^2)$ und einen vierfach zählenden Kegel gleichfalls 2. Klasse, dessen Scheitel L_1 der Pol der Ebene $l(K)$ i. b. a. F_1^2 und F_2^2 ist, also in $\varkappa$ liegt. Zu den Einhüllenden dieses Kegels gehören auch die Ebenen $\mathfrak{L}_1(l)$, $\varkappa$ und die Tangentialebenen an F_1^2 in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, an F_2^2 in $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$, endlich auch die Tangentialebenen an den Kegel $K(k_2)$ in den Punkten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, in welchen er von l getroffen wird. Liegt aber l seiner ganzen Ausdehnung nach in $\varkappa$, so zerfällt dieser letztgenannte Kegel 2. Klasse in 2 Ebenenbüschel 1. Klasse, deren Achsen die Geraden $L_1\mathfrak{T}_1$ und $L_1\mathfrak{T}_2$, also die Tangenten von L_1 an k_2 sind.

16. Sehr interessant ist der Fall, da l durch einen Eckpunkt des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polartetraeders geht. Wir wollen die Bezeichnung wie in 7. beibehalten, und l möge durch R_1 gehen und ϱ_1 in $\mathfrak{L}$ schneiden. Für eine beliebige Ebene π durch l liegen dann immer 2 Punkte P_i in der Ebene ϱ_1 auf dem Strahl r_1. Die l^{10} zerfällt also hier offenbar in eine ebene Kurve, die in ϱ_1 liegt, und eine Raumkurve, die ihrer ganzen Ausdehnung nach auf dem Kegel $R_1(k^3)$ liegt. Untersuchen wir zuerst die Eigenschaften der ebenen Kurve. Auf jedem Strahle r_1 des Büschels $\mathfrak{L}(r_1)$ liegen zunächst 2 Punkte der Kurve. Legt man aber von $\mathfrak{L}$ an F_1^2 und F_2^2 die Tangentialkegel, so fallen von den Kanten des diesen beiden Kegeln ge-

meinsamen Polardreikants 2 in die Ebene ϱ_1, während die dritte mit $\mathfrak{L}R_1 \equiv 1$ identisch wird. 2 von den Verbindungsebenen der von $\mathfrak{L}$ ausgehenden Kongruenzstrahlen schneiden sich also in $\mathfrak{L}R_1$, d. h. sie gehören zum Ebenenbüschel $l(\pi)$. $\mathfrak{L}$ ist folglich ein Doppelpunkt der in ϱ_1 liegenden ebenen Kurve; dieselbe hat infolgedessen mit jedem Strahle r_1 im ganzen 4 Punkte gemeinsam, muß also von 4. Ordnung sein. Es ist leicht, die 8 Schnittpunkte der Kurve mit k_1^2 bezw. k_2^2 zu finden. Die Punkte S_1, S_1' und S_2, S_2' liegen nämlich diesmal alle in ϱ_1, und die Geraden $\mathfrak{L}S_1$, $\mathfrak{L}S_1'$ $\mathfrak{L}S_2$, $\mathfrak{L}S_2'$ sind mithin Tangenten an die Kurve in S_1, S_1' u. s. w. Die Kurve berührt also daselbst die Kegelschnitte k_1^2 und k_2^2. Geht außerdem π durch einen der Schnittpunkte M_i von k_1^2 und k_2^2, so muß einer der Punkte P_i mit M_i zusammenfallen, da die Punkte M_i ja hier zu den A_i gehören. Weitere Schnittpunkte sind nicht vorhanden.

Die Restkurve, die auf dem Kegel $R_1(k^3)$ liegt, ist daher noch von 6. Ordnung; sie sei l^6 genannt. Auf jeder Erzeugenden des Kegels liegen also 2 Punkte der l^6; R_1 selbst kann nicht Punkt der Kurve sein. Dagegen liegen auf l 2 Punkte der Kurve. Sie sind Nullpunkte der Ebene π, die durch den Schnittpunkt der Geraden S_1S_1' und S_2S_2' geht, und sind durch $\mathfrak{L}$ und R_1 harmonisch getrennt. Zu den Schnittpunkten der l^6 mit ϱ_1 gehören die Punkte S_1, S_1' und S_2'. Ferner sind dazu die in mit N_1 und N_2 bezeichneten Punkte zu rechnen, die in den Tangentialebenen von $\mathfrak{L}$ an den Kegel $R_1(k^3)$ liegen.

Die Fläche F_1^2 wird von l^6 in S_1 und S_1' berührt und in den Punkten Q_{21}, Q_{22} und Q_{21}, Q_{22}' durchdrungen. Die weiteren 4 Schnittpunkte liegen in den Ebenen

$l(N_1)$ und $l(N_2)$ und sind in 7. mit A_1, A_1', A_2 und A_2' bezeichnet.

Geht l noch durch einen 2. Eckpunkt R_2 des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polartetraeders, so zerfällt l^{10} in 2 ebene Kurven 4. Ordnung. Wo aber ist die Restkurve? Die Kurve k^3 zerfällt hier in die 3 Geraden $S_1S_1' \equiv S_2S_2'$, $\mathfrak{L}M_1M_2$ und $\mathfrak{L}M_3M_4$, der Kegel $R_1(k^3)$ mithin in 3 Strahlenbüschel 1. Grades. Von den 3 in einer Ebene π liegenden Geraden k_1, k_2, k_3 fällt eine stets mit l zusammen. 2 der Punkte P_i liegen also stets auf l. Konstruiert man aber von einem Punkt P auf l die Nullebenen, so findet man, daß 1 Paar sich stets in l schneidet. Jeder Punkt von l ist mithin zweifacher Punkt der l^{10}, d. h. die Restkurve ist die zweifach zählende l selbst.

R_1 und R_2 sind also diesmal vierfache Punkte der l^{10}.

Für die abwickelbare Fläche T^{10} ergibt sich hieraus: Liegt l in einer Ebene ϱ_1 des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polartetraeders, so zerfällt T^{10} in einen Ebenenbüschel 4. Klasse und einen Resttorsus 6. Klasse. Der Ebenenbüschel hat R_1, den Pol von ϱ_1, zum Scheitel und die Ebene $R_1(l)$ zur Doppelebene. Zu den Ebenen, die ihm angehören und F_1^2 berühren, gehören die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, wobei aber die Geraden $R_1\mathfrak{S}_1$ und $R_1\mathfrak{S}_1'$ Erzeugende des Kegels sind, der von unserm Büschel eingehüllt wird; ferner gehören dazu die 4 Ebenen durch R_1, die F_1^2 und F_2^2 zugleich berühren.

Von dem Resttorsus gehen 2 Tangentialebenen durch l. Man findet den zugehörigen Punkt P auf l, indem man die Schnittgerade der Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ mit der der Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_2$ und

$\mathfrak{S}_2'$ durch eine Ebene verbindet und letztere mit l zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt ist der gesuchte. Die beiden Ebenen durch l sind durch $l(R_1)$ und ϱ_1 harmonisch getrennt.

Liegt aber l auch noch in der Ebene ϱ_2 des Polartetraeders, d. h. ist sie die Verbindungslinie von R_3 und R_4, so zerfällt T^{10} in 2 Ebenenbüschel 4. Klasse mit den Scheiteln in R_1 und R_2 und einen zweifach zählenden Ebenenbüschel 1. Klasse, dessen Achse l selbst ist. ϱ_1 und ϱ_2 sind diesmal vierfache Ebenen des Torsus.

17. Die andern speziellen Lagen von l sind meistens einfacher zu behandeln. Es seien hier noch einige kurz erwähnt. Liegt der Strahl l seiner ganzen Ausdehnung nach auf F_1^2, so zerfällt f_1^2 stets in 2 sich schneidende Gerade, von denen die eine l selbst ist. 4 Punkte P_i liegen also immer auf l, die andern beiden aber auf f_2^2. In den Punkten $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ aber fallen diese beiden Punkte auch auf l. Die Teilkurve der l^{10}, die auf F_2^2 liegt, ist also von 4. Ordnung. In den Ebenen $l(S_2)$ und $l(S_2')$ zerfallen jedoch f_1^2 und f_2^2 in je 2 Gerade. Als Punkt P_i kann man folglich jeden Punkt auf den Verbindungslinien der Schnittpunkte obiger Geradenpaare ansehen, die beiden Geraden gehören auch zur Kurve der P_i. Die l^{10} zerfällt also diesmal in die vierfach zählende Gerade l, in eine auf F_2^2 liegende Kurve 4. Ordnung und in 2 gerade Linien, die in den Ebenen $l(S_2)$ und $l(S_2')$ liegen.

Liegt aber l zugleich auch auf F_2^2, so fallen stets alle Punkte P_i auf l, d. h. l^{10} besteht diesmal aus der zehnfach zählenden Geraden l.

Trifft l die Kurve f^4, in welcher F_1^2 und F_2^2 sich schneiden, in U, so fällt, wenn die Ebene π durch

die Tangente an f^4 in U geht, einer der Punkte P_i nach U. Da aber beim Passieren dieser Lage die Anzahl der in π liegenden Kongruenzstrahlen nicht geändert wird, so muß l^{10} in U sowohl F_1^2 als auch F_2^2, also auch f^4 berühren. Es fallen also 2 Punkte A_i nach U.

Wird l zur Tangente an f^4 in U, so fallen für jede Ebene π 2 Kongruenzstrahlen mit l zusammen, während die beiden andern i. a. von l verschieden sind. Ein Punkt P_i fällt also stets nach U. Ferner fallen 4 weitere Punkte P_i paarweise zusammen und liegen ihrerseits auf l. Dieser Strahl gehört also zu l^{10}. Und da von jedem Punkte P auf l außer l noch 3 weitere Kongruenzstrahlen ausgehen, so gibt es im Büschel $l(\pi)$ 3 Ebenen, die P zum Nullpunkt haben, d. h. l gehört zunächst als dreifach zählende Gerade zu l^{10}. Es gibt aber noch 3 Ebenen, für welche jeder Punkt von l als Nullpunkt betrachtet werden kann. Es sind dies die Tangentialebenen in U an F_1^2 und F_2^2 und die Schmiegungsebene in U an f^4; denn in den beiden ersten Ebenen fallen alle 4, in der letzteren 3 Kongruenzstrahlen mit l zusammen. In diesem Falle haben nämlich die beiden Kegelschnitte in U 3 zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie oskulieren in U. Im ganzen ist also l sechsfach zur Kurve l^{10} zu rechnen. Die noch verbleibende Restkurve 4. Ordnung — sie heiße l^4 — wird erzeugt durch den Punkt P_i, der i. a. nicht auf l liegt. l^4 trifft die Gerade l in 3 Punkten. nämlich zweimal im Punkte U, der als Punkt der l^4 durch die beiden Tangentialebenen an F_1^2 und F_2^2 erzeugt wird, und einmal in dem Punkte, in welchem in der Oskulationsebene die einzige noch verbleibende Tangente von f_1^2 und f_2^2 die Gerade l trifft.

Die 8 Punkte aber, die l^4 mit F_1^2 gemeinsam hat, sind außer dem Punkte U, wo l^4 die F_1^2 einmal berührt und einmal schneidet, noch die 5 Punkte A_i, die in diesem Falle erhalten bleiben; ähnlich für F_2^2.

Berührt l die Fläche F_1^2 in S_1, so hat l^{10} in S_1 einen vierfachen Punkt. Derselbe wird erzeugt durch die Tangentialebene in S_1 an F_1^2. In ihr fallen nämlich 4 Punkte nach S_1. Wenn aber π diese Grenzlage durchwandert, wird die Anzahl der reellen P_i nicht verändert. Von den 4 Ästen, die durch S_1 gehen, berühren sich je 2. Auf l aber kann außer S_1 kein weiterer Punkt von l^{10} mehr liegen; denn von einem solchen würde man je 3 Tangenten an f_1^2 legen können.

Berührt l auch die Fläche F_2^2 in S_2, so liegen für jede Ebene π 3 Nullpunkte P_i auf l, da ja l selbst ein Kongruenzstrahl ist. Und da von jedem Punkte P auf l 3 Nullebenen durch l gehen, so ist l ein dreifach zählender Bestandteil der l^{10}. Die noch verbleibende Restkurve heiße daher l^7. Diese trifft l viermal, da S_1 und S_2 Doppelpunkte der l^7 sind. In ihnen berührt die Kurve natürlich auch F_1^2 bezw. F_2^2 je zweifach. Ein weiterer Berührungspunkt der l^7 mit F_1^2 liegt in der Tangentialebene an F_2^2 in S_2 und ist der Berührungspunkt W_1 der 2. Tangente von S_2 an f_1^2; auf F_2^2 gibt es einen analogen Berührungspunkt W_2. Die Punkte A_i bleiben vollständig erhalten.

Wird aber l Erzeugende der abwickelbaren Fläche φ^4 (siehe 2.), fallen also die Tangentialebenen von S_1 und S_2 zusammen, so liegen wie oben, auch stets 2 Punkte P_i auf l. Fällt jedoch π mit der erwähnten Tangentialebene zusammen, so liegen alle 6 Punkte P_i auf l. 1 Paar fällt nach S_1, ein zweites nach S_2. Die Lage der beiden übrigen Punkte P_i aber ist un-

bestimmt, man kann jeden Punkt der l als solchen ansehen. l ist also hier als vierfache Gerade zu l^{10} zu rechnen. Doch ist ein Punkt auf l noch ausgezeichnet; in ihm trifft die Restkurve — l^6 — die Gerade l. Außerdem trifft l^6 die l noch in S_1 und S_2. In diesen Punkten S_i hat l^6 4 Punkte mit F_i^2 gemeinsam, da ja auch die oben mit W_i bezeichneten Punkte dorthin fallen. Außerdem trifft l^6 die beiden Flächen F_i^2 noch in den 8 Punkten A_i.

Die Eigenschaften der Fläche T^{10} in diesen Spezialfällen können ohne weiteres angegeben werden.

18. Nehmen wir nun an, die beiden Flächen F_1^2 und F_2^2 seien Kugeln. Da alle Kugeln die unendlich ferne Ebene im imaginären Kugelkreis schneiden, so ist dieser Fall ein spezieller des in 15b) angeführten. Der Kreis, in welchem sich F_1^2 und F_2^2 noch schneiden, heiße k^2. Die Mittelpunkte der Kreise f_1^2 und f_2^2 seien O_1 und O_2. Zunächst sei hier noch etwas über die Kurve k^5 und die Regelfläche K^6 (vgl. 6.) gesagt. In jeder Ebene π fällt ein Strahl k_i, sagen wir k_1, mit der f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Zentrale O_1O_2 zusammen, während k_2 und k_3 stets auf O_1O_2 senkrecht stehen, also sich im Unendlichen schneiden. Für den Ebenenbüschel $l(\pi)$ beschreiben aber O_1 und O_2 Kreise, die l in je einem Punkte schneiden und deren Ebenen senkrecht zu l, also unter sich parallel sind. Die beiden Kreise haben daher ihre beiden uneigentlichen Punkte gemeinsam. Nach den in 8. angegebenen Formeln erzeugt demnach die Gesamtheit der k_1 eine Regelfläche von $2\cdot2\cdot2 - 2\cdot2 - 1\cdot2 = 2\cdot$Grade, d. h. eine gewöhnliche Regelschar. Die beiden andern Strahlen k_2 und k_3 rufen also eine Regelfläche 4. Grades hervor. Der unendlich ferne Schnittpunkt K_1 von k_2

und k_3 ist derselbe wie der uneigentliche Punkt der f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Sehne. K_1 erzeugt also die unendlich ferne Gerade der Ebene des Kreises k^2. Die Schnittkurve dieser Ebene mit der Regelfläche 4. Grades besteht außer der unendlich fernen Doppelgeraden noch aus den beiden Tangenten an k^2, die man vom Schnittpunkt der Ebene mit l an k^2 legen kann. Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind A_1 und A_2. Die Punkte K_2 und K_3 beschreiben eine Kurve 4. Ordnung; ihre Schnittpunkte mit F_1^2 und F_2^2 sind S_1 und S_1', bezw. S_2 und S_2', dann A_1 und A_2, die imaginären Kreispunkte von k^2 und endlich die Berührungspunkte A_3, A_4 der Tangenten von dem uneigentlichen Punkte der l an den imaginären Kugelkreis. Damit sind auch ihre Schnittpunkte mit der Ebene von k^2 und mit der unendlich fernen Ebene bestimmt.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß auch die l^{10} hier in 2 Teile zerfallen muß, von denen der eine auf der Regelschar der k_1 liegt. Wir bestimmen die Ordnung dieses Teiles, indem wir A^8 zum Schnitt bringen mit der Regelfläche, deren eine Schar die k_1 bilden und zu deren andern Schar l gehört. Die Schnittkurve muß von 16. Ordnung sein. Zu ihr gehört l selbst als vierfache Gerade; ferner die 2 Tangenten an F_1^2 und F_2^2 in den imaginären Kreispunkten von k^2, die mit l in je einer Ebene liegen, als Doppelgerade der A^8 je zweifach zu rechnen. Die Restkurve muß daher noch als Doppelkurve von A^8 von $(16 - 4 - 2 \cdot 2) : 2 =$ 4. Ordnung sein; sie heiße l^4. Die Gerade l enthält 2 Punkte derselben. Offenbar hat jede Gerade auf der Regelfläche 2. Grades, gleichviel zu welcher Schar sie gehört, mit l^4 2 Punkte gemeinsam. l^4 ist also eine

gewöhnliche Raumkurve 4. Ordnung, wie man sie etwa als Schnitt zweier Regelflächen 2. Grades erhält.

Die Restkurve der l^{10} ist also noch von 6. Ordnung. Sie hat mit l gleichfalls 2 Punkte gemein.

Aus Obigem ergibt sich folgender Satz:

„Gegeben 2 Kugeln und eine Ebene π, welche dieselben in 2 Kreisen f_1^2 und f_2^2 schneide. Beschreibt π einen Büschel, so erzeugt die f_1^2 und f_2^2 gemeinsame Zentrale eine Regelschar 2. Grades, der Schnittpunkt der gemeinsamen äußern, bezw. innern Tangenten aber eine Kurve 4. Ordnung, die auf der erwähnten Regelschar liegt.“

19. Ausführlich aber wollen wir die Eigenschaften der l^{10} untersuchen für den Fall, in welchem F_2^2 in einen Kegelschnitt k^2 ausartet. Die Bezeichnungen von 5. sollen hier ebenfalls gelten. Dann sieht man sofort, daß 2 der Punkte P_i für sich den Kegelschnitt k^2 erzeugen. Die übrigen Punkte beschreiben mithin eine Kurve 8. Ordnung, die l^8 heißen möge. Wir wissen bereits, daß hier S_2 und S_2' mit R_1 und R_2 und von den Punkten A_i 4 mit M_1, M_2, M_3, M_4, die übrigen aber paarweise mit V_1 und V_2 zusammenfallen. Die Ebenen $l(R_1)$ und $l(R_2)$ berühren also l^8 in R_1 und R_2. Bezeichnet man ferner die Tangente in M_i an den in der Ebene $l(M_i)$ liegenden Kegelschnitt f_1^2 mit m_i, so kann man sagen: In den Ebenen $l(M_i)$ fallen die Punkte der l^8 paarweise zusammen auf m_i. Die beiden außer m_i noch in $l(M_i)$ liegenden Kongruenzstrahlen aber berühren l^8 in ihren Schnittpunkten mit m_i, die M_i und M_i' heißen sollen. Da nach V_1 und V_2 je 1 Paar der Punkte A_i fällt, so muß daselbst l^8 die Fläche F_1^2 berühren. Außerdem berührt l^8 diese Fläche noch in S_1 und S_1' je zweifach und durchdringt

dieselbe in den Punkten Q_{21}, Q_{21}' Q_{22}, Q_{22}', die durch die Ebenen $l(R_1)$ und $l(R_2)$ erzeugt werden.

Die Ebene $\varkappa$ aber wird von l^8 in folgenden Punkten getroffen: O_1, O_1', O_2, O_2', V_1, V_2, R_1 und R_2.

Dual dazu findet man folgendes. Artet F_2^2 in einen Kegel K^2 2. Grades aus, dessen Mittelpunkt K ist, so zerfällt T^{10} in den Kegel K^2 selbst und einen Resttorsus T^8 von 8. Klasse. Von den Ebenen β_i sind nach 5. 4 identisch mit den F_1^2 und K^2 gemeinsamen Tangentialebenen μ_i. Die übrigen 4 β_i aber fallen paarweise zusammen mit den Tangentialebenen von K an F_1^2, deren Berührungspunkte T_1 und T_2 in der Ebene $l(K)$ liegen. Schneiden die Ebenen μ_i die Gerade l in $\mathfrak{M}_i$, so sind die beiden andern Kongruenzstrahlen, die durch $\mathfrak{M}_i$ gehen, Erzeugende von T^8 für die durch sie gehenden Grenzebenen.

Die Ebenen, die T^8 mit F_1^2 gemeinsam hat, sind daher die Berührungsebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ je vierfach, die Berührungsebenen in T_1 und T_2 je zweifach und die durch $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ erzeugten Berührungsebenen an F_1^2 je einfach. Durch K aber gehen 8 Ebenen an T^8; es sind dies die erwähnten Tangentialebenen in T_1 und T_2, die Tangentialebenen an K^2 in $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ und die Tangentialebenen von KT_1 und KT_2 an K^2.

20. Betrachten wir auch hier einige Ausartungen. Sehr einfach ist der Fall, daß l ganz in der Ebene $\varkappa$ liegt. Die k^2 möge von ihr in K_1 und K_2 geschnitten werden. Dann besteht die Fläche A^8 a) aus den beiden Tangentialkegeln von K_1 und K_2 an F_1^2 und b) aus dem zweifach zählenden Strahlenbüschel 2. Klasse, das die Gesamtheit der Tangenten des Kegelschnittes e^2 bildet (e^2 Schnittkurve von F_1^2 mit $\varkappa$). Von l^8 dagegen ist der Teil unbestimmbar, der in $\varkappa$ selbst liegt,

da ja $\varkappa$ eine singuläre Ebene ist, die unendlich viele Nullpunkte enthält. Der durch die beiden Kegel hervorgerufene Teil besteht aus 2 Kegelschnitten, die sich in den Berührungspunkten der Tangentialebenen von l an F_1^2 schneiden und $\varkappa$ in den 4 Punkten treffen, in welchen die Tangenten von K_1 und K_2 an e^2 sich schneiden.

Für T^8 findet man entsprechend: Geht l durch den Mittelpunkt K des Kegels K^2, und heißen die Tangentialebenen von l an K^2 entsprechend $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, so besteht A_1^8 a) aus den beiden Kurven 2. Klasse, die in $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ hervorgerufen werden durch die Tangenten der in diesen Ebenen liegenden Kegelschnitte f_1^2 und b) aus dem zweifach zählenden Tangentialkegel von K an F_1^2. Von T^8 aber sind nur die 2 Ebenenbüschel 2. Klasse angebbar, die hervorgerufen werden durch die beiden Kurven 2. Klasse in $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ und die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ an F_1^2 gemeinsam haben.

Geht l durch den Pol K von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2, so haben wir den in 16. behandelten Fall vor uns. Die Ebene ϱ_1 ist hier identisch mit $\varkappa$. Der in $\varkappa$ liegende Teil der l^{10} zerfällt aber hier, da ja k^2 selbst dazu gehört. Da aber L ein Doppelpunkt dieser Kurve 4. Ordnung ist und im allgemeinen nicht auf k^2 liegt, so muß dieselbe außer k^2 noch aus 2 Geraden bestehen, die sich in L schneiden. Es sind dies die Tangenten LV_1 und LV_2 von L an e^2. In der Tat sind es ja auch gerade die Ebenen $l(V_1)$ und $l(V_2)$, die nach 16. L als Doppelpunkt erzeugen.

Der Rest der l^8 ist auch hier eine Kurve 6. Ordnung, die auf dem Kegel $K(k^3)$ liegt.

Liegt reziprok l in der Polarebene $\varkappa$ von K i. b.

auf F_1^2 ($F_2^2 \equiv K^2$), so zerfällt der in 16. erwähnte Ebenenbüschel 4. Klasse, der in K seinen Scheitel hat und zur T^{10} gehört, in den Kegel K^2 selbst und 2 Ebenenbüschel 1. Klasse, deren Achsen KT_1 und KT_2 sind.

21. Sehr interessant ist auch der Fall, in welchem k^2 mit dem imaginären Kugelkreis zusammenfällt, die Punkte der l^8 also die Brennpunkte der entstehenden Kegelschnitte f_1^2 sind. Ihn wollen wir genauer untersuchen.

Die in 8. mit $\mathfrak{k}^2$ bezeichnete Kurve ist hier der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte f_1^2 als Schnittpunkte der Asymptoten dieser Kurven. Da $\mathfrak{L}$ hier der unendlich ferne Punkt von l ist, so liegt $\mathfrak{k}^2$ in der zu l konjugierten Durchmesserebene λ. Er geht durch den Mittelpunkt von F_1^2, durch S_1 und S_1', durch den Schnittpunkt L von l mit λ und endlich durch die beiden unendlich fernen Punkte V_1 und V_2 des Kegelschnittes, den λ aus F_1^2 ausschneidet. Die in den Ebenen $l(V_1)$ und $l(V_2)$ liegenden Kegelschnitte f_1^2 sind natürlich Parabeln.

Zuerst sei die Fläche untersucht, die von den Asymptoten des Ebenenbüschels $l(\pi)$ gebildet wird. Nach den in 8. angegebenen Formeln ist sie eine Regelfläche von 8. Grade. Hiervon sind aber der Kegel $L(e^2)$, wo e^2 die Schnittkurve von F_1^2 mit der unendlich fernen Ebene bedeutet, sowie die Ebenen $l(V_1)$ und $l(V_2)$ in Abzug zu bringen. Die entstehende Fläche ist also von 4. Grade; sie sei A^4 genannt. Der Kegel $L(e^2)$ ist ein Parallelkegel zu dem Asymptotenkegel der F_1^2. Hat man ihn und $\mathfrak{k}^2$ konstruiert, so sind die Erzeugenden von A^4 leicht zu finden, indem man durch den in der Ebene π liegenden Punkt K

von $\mathfrak{f}^2$ die Parallelen zieht zu den Mantellinien des Kegels $L(e^2)$, die diese Ebene ausschneidet. l und $\mathfrak{f}^2$ sind zweifache, e^2 dagegen nur einfache Leitlinie der A^4. Sie wird daher von der unendlich fernen Ebene noch in den Erzeugenden $\mathfrak{S}V_1$ und $\mathfrak{S}V_2$ geschnitten. Die Ebenen $l(V_1)$ und $l(V_2)$ berühren den Kegel $L(e^2)$; die in ihnen liegenden Erzeugenden der A^4 fallen also zusammen, d. h. in $l(V_1)$ und $l(V_2)$ liegt je eine Torsallinie der Regelfläche; es sind dies $\mathfrak{S}V_1$ und $\mathfrak{S}V_2$ selbst.

Die Fläche kann natürlich nur reell werden, wenn der Asymptotenkegel auch reell ist, wie das etwa beim einschaligen oder zweischaligen Hyperboloid der Fall ist.

Die 2. Fläche von Bedeutung ist die in 8. mit K^5 bezeichnete. k^3 liegt hier in unendlicher Ferne; es kommt also darauf an, die Richtungen der in der jeweiligen Ebene π liegenden Erzeugenden k_2 und k_3 (k_1 ist die unendlich ferne Gerade von π) zu finden. Da aber die P_i die Brennpunkte der f_1^2 sind, so müssen k_2 und k_3 die Achsen von f_1^2 sein, und da die Achsen die Winkel zwischen den Asymptoten von f_1^2 halbieren, so kann man die Erzeugenden der K^5 sofort mit Hilfe derer von A^4 finden.

Unter den Erzeugenden der K^5 gibt es eine, die l parallel ist; sie liegt in der Ebene π, in welcher l selbst die Halbierungslinie des Winkels ist, der zwischen den Mantellinien des Kegels $L(e^2)$ liegt. Man findet diese Ebene auf folgende Art. Man lege durch L die zu l i. b. a. den Kegel $L(e^2)$ konjugierte Ebene und suche darin den zu l normalen Strahl. Die durch ihn und l bestimmte Ebene ist die gesuchte. Es ist klar, daß diese Ebene die Tangente an k^2 und L enthält. Die in 8. erwähnten Torsallinien der K^5 sind hier imaginär.

Zu der Fläche K^5 kommen nach 8. noch der Kegel $L(k^3)$, bestehend aus den Winkelhalbierenden zwischen den jeweiligen Mantellinien des Kegels $L(e^2)$, der Zylinder, dessen Erzeugende parallel zu l durch die Punkte der f^2 gehen (als Kegel $L(f^2)$) und die Ebenen $l(V_i)$.

Zusammenfassend erhalten wir also folgende Sätze:

a) „*Die Asymptoten aller Kegelschnitte, die ein Ebenenbüschel $l(\pi)$ aus einer Fläche 2. Ordnung F^2 ausschneidet, erzeugen eine Regelfläche 4. Grades, die l zur zweifachen Leitgeraden hat.*“

b) „*Die Achsen aller Kegelschnitte, die ein Ebenenbüschel $l(\pi)$ aus einer Fläche 2. Ordnung F^2 ausschneidet, erzeugen eine Regelfläche 5. Grades, die l zur dreifachen Leitgeraden hat.*“

c) „*Gegeben ein Kegel $L(e^2)$ und ein Ebenenbüschel $l(\pi)$, dessen Achse l durch den Scheitel L des Kegels geht. Dann erzeugen die Winkelhalbierenden zwischen den in jeder Ebene π liegenden Mantellinien des Kegels $L(e^2)$ einen Kegel 3. Grades, der auch l und die Berührungslinien der Tangentialebenen von l an $L(e^2)$ als Erzeugende enthält.*“

Der letzte Satz ist übrigens ein spezieller Fall des folgenden, der sich mit Hilfe von 20. leicht ergibt:

d) „*Gegeben eine Fläche F^2 2. Ordnung und ein Ebenenbüschel $l(\pi)$, dessen Achse durch den Mittelpunkt K von F^2 geht. Dann erzeugen die Achsen sämtlicher durch die Ebenen π ausgeschnittenen Kegelschnitte einen Kegel 3. Grades, der l als Erzeugende enthält. Auch die Berührungslinien der Tangentialebenen von l an den Asymptotenkegel von F^2 gehören zu den Erzeugenden.*“

22. Betrachten wir nun die Kurve l^8. Es ist klar, daß von den Punkten P_i stets nur ein Paar reell sein kann, während die andern paarweise konj. imaginär sind. Nur in S_1 und S_1' fallen 2 Paare von Punkten zusammen und sind gegebenen Falles reell; die Punkte sind Doppelpunkte der l^8. Von den weitern Punkten, die l^8 mit F_1^2 gemein hat, können nur noch V_1 und V_2 reell sein. Dagegen sind die Punkte $Q_{21} \ldots Q_{22}'$ imaginär; denn wäre etwa Q_{21} reell, so müßte auch die Tangente in Q_{21} reell sein, was nach 5. nicht zutrifft. Auch die in der unendlich fernen Ebene liegenden Punkte der l^8 sind mit Ausnahme von V_1 und V_2 stets alle imaginär, da dieselben sämtlich auf dem imaginären Kugelkreis liegen. Dagegen sind die 4 Punkte auf l auch hier im allgemeinen reell.

Auf 2 bemerkenswerte Ausartungen sei hier noch hingewiesen. Fürs erste gehe l durch den Mittelpunkt K von F_1^2, also durch den Pol von $\varkappa$. Dann zerfällt K^5 in die beiden Tangentialebenen durch l an $\cdot F_1^2$ (sie berühren in unendlicher Ferne) und einen Kegel 3. Grades mit K als Scheitel. Dieser läßt sich leicht auf folgende Art konstruieren. Man errichte über $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1'$ als Durchmesser eine Kugel. Dieselbe schneidet F_1^2 in einer Raumkurve 4. Ordnung, die auch durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ geht. Verbindet man einen der weitern Schnittpunkte von π und dieser Kurve mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, so geben diese Verbindungslinien die Richtungen der Erzeugenden unseres Kegels an. Auch l gehört zu den Erzeugenden. Die zugehörige Ebene π ist die, welche zugleich durch die Tangenten in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ an die erwähnte Raumkurve geht. Die Tangenten geben die Richtung der 2. in dieser Ebene liegenden Erzeugenden an. Die l^8 besteht natürlich aus einer

auf diesem Kegel liegenden Kurve 6. Ordnung und den beiden uneigentlichen Geraden LV_1 und LV_2.

Die andere Ausartung, die wir erwähnen wollen, tritt ein, wenn F_1^2 zur Kugel wird. Die l^8 besteht dann aus dem vierfach zählenden Kreis, der der Ort der Mittelpunkte der Kreise f_1^2 ist. Er ist bereits ausführlich behandelt worden.

23. Nehmen wir jetzt an, daß auch F_1^2 in einen Kegelschnitt ausartet. Die Bezeichnung von 9. soll wieder angewandt werden. Dann liegen stets 2 der Punkte P_i auf k_1^2 und 2 andere auf k_2^2. Die Gesamtheit dieser 2 Punktepaare erzeugt also, wenn π einen Büschel beschreibt, die Kegelschnitte k_1^2 und k_2^2 selbst. Die beiden übrigen Punkte P_i müssen also noch eine Kurve 6. Ordnung — l^6 — hervorrufen. Es ist leicht die Punkte aufzusuchen, die l^6 mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gemeinsam hat. In $\varkappa_1$ liegen zunächst die Punkte R_1 und R_1'. Die übrigen 4 Punkte aber sind die Schnittpunkte von k_1^2 mit den Strahlen L_1W_2 und L_1W_2'. Die Punkte liegen also alle auf k_1^2. Ebenso liegen auf $\varkappa_2$ folgende Punkte von l^6: R_2 und R_2' und die Schnittpunkte von L_2W_1 und L_2W_1' und k_2^2. Auf l selbst liegen wieder 4 Punkte der Kurve.

Trifft aber l die Gerade k, so zerfallen die in 9. mit f_1^2 und f_2^2 bezeichneten Kegelschnitte in R_1R_1' und k, bezw. R_2R_2' und k. Die von k_3 erzeugte Regelfläche 4. Grades zerfällt daher in die beiden Strahlenbüschel, deren Träger L und $\varkappa_1$ bezw. $\varkappa_2$ sind und in eine Regelschar 2. Grades, bestehend aus den Geraden, die l, R_1R_1' und R_2R_2' treffen. Auf jeder dieser Geraden liegen 2 Punkte der l^6. Fällt sie jedoch mit k zusammen, so werden diese beiden Punkte unbe-

stimmt, d. h. k selbst gehört zweifach zur l^6. Die Restkurve ist daher nur noch von 4. Ordnung. Von ihren Schnittpunkten mit $\varkappa_i$ liegt ein Paar auf k; dasselbe ist durch die Schnittpunkte von k mit R_1R_1' und R_2R_2' harmonisch getrennt. Das andere Paar ist R_i und R_i'. Auch auf l selbst liegen noch 2 Punkte der Kurve. Man hat es also hier, ähnlich wie in 18., wieder mit einer Raumkurve 4. Ordnung zu tun, die ganz auf einer Regelfläche 2. Grades liegt und daher als Schnitt etwa zweier Regelflächen angesehen werden kann.

Liegen noch R_1 und R_2 und ebenso R_1' und R_2' mit l in je einer Ebene, so werden auch die beiden Nullpunkte auf R_1R_2 und $R_1'R_2'$ unbestimmt, d. h. auch R_1R_2 und $R_1'R_2'$ gehören ganz der Kurve an. Es bleibt also noch eine Restkurve 2. Ordnung; da diese aber ganz auf einer Regelfläche 2. Grades liegt und mit einer Erzeugenden dieser Regelfläche, nämlich mit k, 2 Punkte gemeinsam hat, so muß auch sie noch in 2 Gerade zerfallen. Dieselben gehören der Regelschar l, R_1R_1', R_2R_2' an und liegen in Ebenen, die durch k gehen und durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ harmonisch getrennt sind.

Liegen endlich k_1^2 und k_2^2 in derselben Ebene $\varkappa$, so erzeugt die Gesamtheit der Punkte P_i ein ebenes Feld, dessen Träger $\varkappa$ selbst ist, indem jeder Ebene π diejenige Punktreihe zugeordnet ist, in welcher sie $\varkappa$ schneidet.

Reziprok hierzu ergibt sich folgendes. Arten F_1^2 und F_2^2 zugleich in die Kegel K_1^2 und K_2^2 aus, so erzeugen die der Punktreihe l(P) zugeordneten Nullebenen π_i außer K_1^2 und K_2^2 noch einen Torsus 6. Klasse, der T^6 heißen soll. Zu den durch den

Punkt K_1 gehenden Ebenen des T^6 gehören vor allem die Tangentialebenen an K_1^2 in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$; die übrigen aber werden erzeugt durch die Schnittgeraden der Ebene $l(K_1)$ mit den Tangentialebenen von K_1 an K_2^2. Die Berührungsebenen von diesen Geraden an K_1^2 sind nämlich die gesuchten. Die durch K_2 gehenden Ebenen von T^6 findet man analog. Durch l selbst gehen natürlich 4 Ebenen des Torsus.

Liegt jedoch l mit der Geraden K_1K_2 in einer Ebene, so arten die in 9. sich ergebenden 2 Kegel 2. Klasse in je 2 Ebenenbüschel 1. Klasse aus, deren Träger K_1K_2 und die Schnittgerade der Tangentialebene in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, bezw. $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ sind. Die Fläche T^6 aber zerfällt in den zweifach zählenden Ebenenbüschel mit der Achse K_1K_2 und einen Resttorsus 4. Klasse. Von den 4 Ebenen an sie durch K_i gehen 2 durch K_1K_2; sie sind harmonisch getrennt durch das Ebenenpaar, das K_1K_2 mit je einer der oben genannten Schnittgeraden verbindet. Auch durch l gehen noch 2 Ebenen dieser Restfläche. Sie kann als die abwickelbare Fläche der doppelten Berührungsebenen zweier Flächen 2. Klasse betrachtet werden.

Schneiden sich aber außerdem noch die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, bezw. $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ in Geraden, die mit l inzidieren, so zerfällt unser Resttorsus in 4 Ebenenbüschel 1. Klasse. 2 derselben haben die eben angeführten Geraden zu Achsen. Die Achsen der beiden übrigen Büschel aber gehören einer Regelschar an, die durch l und die Schnittlinien der Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$, bezw. $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2'$ bestimmt ist. Die Schnittpunkte dieser Achsen mit K_1K_2 sind harmonisch getrennt durch die Punkte K_1 und K_2.

Haben endlich die beiden Kegel denselben Mittelpunkt K, so ruft die Gesamtheit der Ebenen π_i, die durch die Punktreihe l(P) bestimmt sind, einen Ebenenbündel hervor, der K selbst zum Scheitel hat.

24. Endlich seien noch kurz die Eigenschaften der Kurve l^{10} erwähnt, für den Fall, daß F_2^2 in einen Kegel K^2 ausartet. Der Scheitel K dieses Kegels ist dann ein vierfacher Punkt der Kurve, der natürlich auch isoliert liegen kann. Sonst sind ihre Eigenschaften dieselben wie im allgemeinen Fall. Artet auch F_1^2 in einen Kegel aus, so hat l^{10} 2 vierfache Punkte. Interessant ist die Ausartung, in welcher beide Kegel denselben Scheitel K haben. Die 4 Schnittgeraden von $F_1^2 = K_1^2$ und $F_2^2 = K_2^2$ seien voneinander verschieden. Im allgemeinen liegen dann die Nullpunkte einer Ebene π des Büschels weder auf K_1^2 noch auf K_2^2. Fällt jedoch π mit der Ebene $l(K)$ zusammen, so fallen alle 6 Punkte P_i nach K. Es erklärt sich dies so. Die beiden Kegel haben i. a. 4 gemeinsame Tangentialebenen $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, die sich in 6 Geraden schneiden. Trifft l diese Ebenen bezw. in L_1, L_2, L_3, L_4, so besteht die Gesamtheit der Kongruenzstrahlen, die von dem Ebenenbüschel $l(\pi)$ erzeugt werden, aus den 4 Strahlenbüscheln $L_1(\pi_1)$, $L_2(\pi_2)$, $L_3(\pi_3)$, $L_4(\pi_4)$. Nur in der Ebene $l(K)$ liegen unendlich viele Kongruenzstrahlen, nämlich der Strahlenbüschel $K(l)$. Da man aber von einem beliebigen Punkte P auf l nur PK als einen von P ausgehenden Kongruenzstrahl findet, so ist jeder Strahl des Büschels $K(l)$ vierfach zu rechnen. Die Regelfläche Δ^8 besteht also hier aus den Strahlenbüscheln $L_1(\pi_1)$, $L_2(\pi_2)$ . . . und dem vierfach zählenden $K(l)$. Die Kurve l^{10} aber besteht aus den $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ Schnittgeraden dieser

Ebenen, die Träger der erwähnten Strahlenbüschel sind. 4 davon liegen also in der Ebene $l(K)$; sie bestimmen auf l die 4 Punkte der l^{10}. Die 10 Geraden aber treffen sich alle in K, der darum zwanzigfacher Schnittpunkt von l^{10} mit ${K_1}^2$ und mit ${K_2}^2$ ist. Wir haben damit einen Fall gefunden, in welchem l^{10} die denkbar einfachste Gestalt annimmt.

25. Ausführlicher aber wollen wir den hierzu dualen Fall betrachten, d. h. die Eigenschaften der Fläche T^{10} darlegen für den Fall, daß ${F_2}^2$ in einen Kegelschnitt k^2 ausartet. Bezeichnung wie in 5. Die Ebene $\varkappa$ ist natürlich vierfache Tangentialebene an T^{10}. Untersuchen wir zunächst die Schnittkurve von $\varkappa$ mit T^{10}. Von Wichtigkeit ist dabei der Kegelschnitt c^2, in welchem $\varkappa$ den zu einem bel. Punkte P auf l gehörigen Kegel ${\varphi_1}^2$ schneidet. Es fällt nicht schwer, c^2 zu finden, ohne ${\varphi_1}^2$ konstruieren zu müssen. Man lege durch l eine beliebige Ebene; sie schneide k^2 in K_1 und K_2, ${F_1}^2$ in ${f_1}^2$ und die Polare l_1 von l i. b. a. ${F_1}^2$ in $\mathfrak{L}_1$. Wir legen die Tangenten von P an ${f_1}^2$. Dieselben mögen in A und B berühren und $\mathfrak{L}K_1K_2$ in C und D schneiden. Dann sind C und D Punkte von c^2. Jetzt verbinde man A und B. AB geht durch $\mathfrak{L}_1$ und trifft $\mathfrak{L}K_1K_2$ in einem Punkte, der E genannt werden soll. Der Treffpunkt von l_1 mit $\varkappa$ aber heiße L_1. Die Verbindungslinie von E mit L_1 schneidet nun die Schnittkurve e^2 von ${F_1}^2$ und $\varkappa$ in 2 Punkten G_1 und G_2, von denen man leicht nachweisen kann, daß e^2 und c^2 sich in ihnen berühren. Denkt man sich nämlich durch l_1 und AB, also auch durch EL_1 die Ebene gelegt, so ist P der Pol dieser Ebene i. b. a. ${F_1}^2$; denn die Ebene geht durch die Polare von l i. b. a. ${F_1}^2$ und durch die Polare von P

i. b. a. f_1^2. Die Punkte G_1 und G_2 liegen also auf dem Berührungskegelschnitt des Tangentialkegels von P an F_1^2, sind folglich auch Punkte des Kegelschnittes c^2. Da aber c^2 die Kurve e^2 in keinem weitern Punkte mehr treffen kann, so berühren sich beide Kegelschnitte in G_1 und G_2. Von c^2 kennt man also die 4 Punkte C, D, G_1 und G_2 und die Tangenten an ihn in G_1 und G_2, also bereits 6 Elemente; der Kegelschnitt ist dadurch bestimmt.

Wir kennen aber auch die Tangenten von $\mathfrak{L}$ an c^2. Es sind dies die Schnittgeraden von $\varkappa$ mit den Ebenen $l(S_1)$ und $l(S_1')$; denn beide Ebenen sind Tangentialebenen des Kegels $P(F_1^2)$. Die Punkte H_1 und H_2 aber, in denen diese Geraden c^2 berühren, liegen gleichfalls mit L_1 in gerader Linie und sind die Punkte, in welchen PS_1 und PS_2 die Ebene $\varkappa$ treffen. Die Schnittpunkte von $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ mit e^2 seien $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_1'$, bezw. $\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_2'$. Dann ist zunächst klar, daß auch $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$ mit L_1 in je einer Geraden liegen müssen. Beschreibt nun P die Punktreihe l, so erzeugen $L_1G_1G_2$ und $L_1H_1H_2$ zu P(l), also auch unter sich projektive Büschel. Die Doppelstrahlen derselben aber sind eben die Geraden $L_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und $L_1\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$. Ist also in $\varkappa$ der Kegelschnitt e^2 und die beiden Geraden $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ gegeben, so kann man, ohne F_1^2 noch näher zu kennen, stets die Kurve c^2 zeichnen, die e^2 in einem Punkte Q berührt. Man sucht L_1, verbindet Q mit L_1 und zieht durch L_1 den von L_1Q durch $L_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und $L_1\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ harmonisch getrennten Strahl. Er schneidet gerade die Punkte auf $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ aus, in denen diese Geraden die gesuchte c^2 berühren. Durch jeden Punkt von e^2 und ebenso durch jeden Punkt der Geraden $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$

geht also nur ein Kegelschnitt c^2. Dagegen gehen durch jeden andern Punkt von $\varkappa$ i. a. 2 c^2, da man durch ihn 2 Tangenten an F_1^2 legen kann, die l treffen.

Der Kegelschnitt c^2 erleidet verschiedene Male Ausartungen. Fällt $L_1G_1G_2$ mit $L_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ oder $L_1\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ zusammen, so fällt auch $L_1H_1H_2$ dahin, d. h. c^2 artet aus in die zweifach zählende Gerade $L_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ bezw. $L_1\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$. In der Tat werden diese Geraden erzeugt durch die Tangentialebenen in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$ an F_1^2, die ausgeartete Kegel φ_1^2 darstellen. Oder fällt $L_1G_1G_2$ mit der Polaren von $\mathfrak{L}$ i. b. a. e^2 zusammen, so wird $L_1H_1H_2$ identisch mit $L_1\mathfrak{L}$. Die Kurve c^2 zerfällt also in die Tangenten von $\mathfrak{L}$ an e^2. Der zugehörige Punkt P aber ist diesmal $\mathfrak{L}$ selbst. Weitere Ausartungen sind i. a. nicht wahrzunehmen.

Offenbar haben wir es hier mit einem Spezialfall des allgemeinern Problems zu tun, in welchem die Gesamtheit der Kegelschnitte untersucht wird, die 2 gegebene Kegelschnitte doppelt berühren.

Auf 2 spezielle Fälle sei hier noch hingewiesen. Der 1. tritt ein, wenn $\varkappa$ eine Tangentialebene an F_1^2 ist, wenn also e^2 in 2 sich in einem Punkte E schneidende gerade Linien zerfällt. Dann erfüllt die Gesamtheit der c^2 die Kegelschnittschar, die 4 gegebene Gerade berühren, und die oben erwähnten Eigenschaften der c^2 sind dann die bekannten einer Kurvenschar. Bemerkt sei hier noch, daß jetzt auch der 3. ausgeartete Kegelschnitt c^2 in die doppelt zählende Gerade $\mathfrak{L}E$ zerfällt.

Die 2. Ausartung entsteht, wenn l durch den Pol K von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2 geht. Dann liegt l_1 vollständig in $\varkappa$ und ist identisch mit der Geraden V_1V_2, der Polaren von $\mathfrak{L}$ i. b. a. e^2. Die beiden Geraden

$\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ aber berühren e^2 in V_1 und V_2. Infolgedessen müssen alle c^2 die Kurve e^2 in V_1 und V_2 berühren, da sie ja sonst mit e^2 2 einfache Tangenten und 2 Tangenten mit ihren Berührungspunkten gemeinsam hätten, was unmöglich ist. Sie beschreiben mithin zugleich eine Schar und einen Büschel. Da aber ein Kegelschnitt durch 2 Tangenten mit ihren Berührungspunkten und einen weitern Punkt eindeutig bestimmt ist, so geht durch jeden Punkt von $\varkappa$ nur ein Kegelschnitt c^2. Jeder Kegelschnitt c^2 kommt also hier zweimal vor, d. h. es gibt auf l stets 2 Punkte, deren Kegel $P(F_1^2)$ die Ebene $\varkappa$ in derselben Kurve c^2 schneiden. Die Punkte auf l werden dadurch einander involutorisch zugeordnet, und K und $\mathfrak{L}$ sind die Doppelpunkte dieser Involution. Die zu ihnen gehörigen c^2 aber sind e^2 und die Geraden $\mathfrak{L}V_1$ und $\mathfrak{L}V_2$.

26. Durch den Kegelschnitt c^2 finden wir nun leicht die Punkte, in denen der Kegel $P(F_1^2)$ die Kurve k^2 trifft und können dann auch die Schnittgeraden $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ . . . der Ebenen π_1, π_2, π_3 . . . mit $\varkappa$ bestimmen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von k^2 mit $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ mit S_{11}, S_{12} bezw. S_{11}', S_{12}', so fallen in ihnen je 2 der eben erwähnten Treffpunkte zusammen, d. h. eine der $\mathfrak{p}_i$ fällt mit der Tangente in S_{11}, eine andere mit der in S_{12} an k^2 zusammen, während die übrigen 4 $\mathfrak{p}_i$ mit $S_{11}S_{12}$ identisch werden. Das Gleiche geschieht in S_{11}' und S_{12}'. Außerdem berührt noch je eine Kurve c^2 den Kegelschnitt k^2 in den in 3. mit B_{12}, B_{22}, B_{32}, B_{42} . . . bezeichneten Punkten, so daß auch dort eine der $\mathfrak{p}_i$ mit der Tangente an k^2 in B_{i_2} zusammenfällt, von den übrigen $\mathfrak{p}_i$ aber 4 paarweise zusammenfallen.

Von der Schnittkurve der $\varkappa$ mit T^{10} können wir also folgende Eigenschaften angeben.

a) Da $\varkappa$ vierfache Tangentialebene der T^{10} ist, so besteht die Schnittkurve aus den 4 Punkten, in denen die in $\varkappa$ liegenden Erzeugenden von T^{10} deren Rückkehrkante berühren, und außerdem aus einer Restkurve 6. Klasse, die τ^6 heißen möge.

b) Die 6 Tangenten, die man von $\mathfrak{L}$ an τ^6 legen kann, sind die Strahlen $\mathfrak{L}V_1$, $\mathfrak{L}V_2$ und die 4 Geraden, in welchen die mit l inzidenten Nullebenen π_i die Ebene $\varkappa$ schneiden.

c) Die 6 Tangenten an τ^6, die durch einen beliebigen Punkt von k^2 gehen, werden in Gruppen zu je 3 bestimmt durch die beiden Kegelschnitte c^2, die ihn enthalten. Für manche Punkte auf k^2 fallen ein oder mehrere Paare dieser Tangenten zusammen. Solche Punkte sind z. B. die Schnittpunkte B_{i_2}' und B_{i_2}'' von k^2 mit dem Kegelschnitt c^2, der k^2 in B_{i_2} berührt. Die Geraden $B_{i_2}B_{i_2}'$ und $B_{i_2}B_{i_2}''$ berühren also τ^6 in B_{i_2}' und B_{i_2}''. Auch die Schnittpunkte von k^2 und e^2 und die Schnittpunkte von k^2 mit $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ haben diese Eigenschaft; denn durch jeden von ihnen geht nur ein Kegelschnitt c^2. Die 3 durch ihn gehenden Tangenten der τ^6 berühren folglich τ^6 in diesem Punkt, der also ein dreifacher Punkt der Kurve ist.

d) Die 12 Tangenten, die k^2 und τ^6 gemeinsam haben, sind die Tangenten an k^2 in S_{11}, S_{12}, S_{11}', S_{12}', B_{12}, B_{22}, B_{32} . . . B_{82}.

e) Die Geraden $S_{11}S_{12}$ und $S_{11}'S_{12}'$ sind Doppeltangenten der τ^6. Die Berührungspunkte aber sind harmonisch getrennt durch S_{11} und S_{12} bezw. S_{11}' und S_{12}'.

Ist aber $\varkappa$ eine Ebene, die F_1^2 in E berührt, so fallen alle zu $\mathfrak{L}$ gehörigen π_i mit $\varkappa$ zusammen. Dabei spielt aber $\mathfrak{L}$ die Rolle eines Kuspidalpunktes der A^8; denn waren z. B. vor dem Durchgang von P durch $\mathfrak{L}$ alle Kongruenzstrahlen a', b', c', d' reell, so sind sie nachher paarweise konj. imaginär, so daß die Anzahl der reellen π_i um 4 vermindert wird. $\varkappa$ ist also zweifache Grenzebene und dann noch Doppelebene der T^{10}. Von den 3 durch $\mathfrak{L}$ gehenden Strahlen q_i (siehe 6.) fallen 2 mit $\mathfrak{L}E$ zusammen, während der 3. gleichfalls in $\varkappa$ liegt und von $\mathfrak{L}E$ durch $\mathfrak{L}R_1$ und $\mathfrak{L}R_2$ harmonisch getrennt ist. Die durch K als zweifache Grenzebene hervorgerufenen Erzeugenden von T^{10} fallen daher beide mit $\mathfrak{L}E$ zusammen. Die von $\varkappa$ als Doppelebene hervorgerufenen Erzeugenden aber sind identisch mit den Tangenten an k^2 in den Schnittpunkten S_{11}'' und S_{12}'' von $\mathfrak{L}E$ mit k^2. Sie schneiden sich natürlich in einem Punkte, der auf dem zu $\mathfrak{L}E$ durch $\mathfrak{L}R_1$ und $\mathfrak{L}R_2$ harmonisch liegenden Strahle liegt. Man sieht dies sofort ein, wenn man bedenkt, daß der zu $\mathfrak{L}$ gehörige Kegelschnitt c^2 in die doppelt zu zählende Gerade $\mathfrak{L}E$ ausartet.

Andererseits muß aber auch erwähnt werden, daß in diesem Falle F_1^2 und F_2^2 sich berühren in E, daß also hier die Anzahl der Punkte B_i, mithin auch die der B_{i_2} um 2 vermindert wird.

Die Kurve τ^6 bleibt also hier erhalten. Zu den 6 von $\mathfrak{L}$ ausgehenden Tangenten an sie gehört $\mathfrak{L}E$ als Doppeltangente. τ^6 hat also hier 3 Doppeltangenten. Die 12 Tangenten, die k^2 und τ^6 gemeinsam haben, sind diejenigen an k^2 in S_{11}, S_{11}', S_{12}, S_{12}', S_{13}, S_{13}', und den 6 noch verbleibenden B_{i_2}.

Nebenbei ergibt sich hier folgender Satz:

„Gegeben 2 Kegelschnitte c^2 und k^2. Die Verbindungslinien ihrer Schnittpunkte seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_6$. Beschreibt c^2 eine Kegelschnittschar, so erzeugen die $\mathfrak{p}_i$ einen Strahlenbüschel 6. Klasse, der die Seiten des der ganzen Schar gemeinsamen Polardreiecks zu Doppelerzeugenden hat. Auch die Tangenten an k^2 in seinen Schnittpunkten mit den erwähnten 3 Geraden gehören dem Büschel an.“

Geht l durch den Pol K von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2, während diese Fläche ihre gewöhnliche Lage hat, so artet die Kurve τ^6 in eine doppelt zu nehmende Kurve 3. Klasse aus, indem sich in je einer erzeugenden Geraden der Kurve 2 der Ebenen π_i schneiden, die von 2 auf l zu $\mathfrak{L}$ und K harmonisch liegenden Punkten P erzeugt werden (vgl. vor. Nr.). Solche konj. Punkte sind speziell $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1'$. Deshalb fällt hier auch $S_{11}S_{12}$ mit $S_{11}'S_{12}'$ zusammen. Sie sind identisch mit der Geraden V_1V_2. Von den 3 Tangenten der Kurve, die durch $\mathfrak{L}$ gehen, werden 2 durch die Ebenen $l(V_1)$ und $l(V_2)$ erzeugt; diese gehören nämlich hier zu den π_i. Die beiden übrigen π_i, die noch durch l gehen, schneiden sich, da sie durch konjug. Punkte erzeugt werden, in einer Geraden, die in $\varkappa$ liegt und daher die 3. von $\mathfrak{L}$ ausgehende Tangente der Kurve ist.

27. Noch 2 andere Schnittkurven in $\varkappa$ sind zu erwähnen; es sind die Kurven, in welchen die in 6. Σ^5 und Q^6 genannten Flächen von der Ebene geschnitten werden. Da $\varkappa$ selbst eine Ebene der Σ^5 ist, so muß ihre Schnittkurve mit Σ^5 noch von 4. Klasse sein; sie heiße σ^4. Die 4 Tangenten von $\mathfrak{L}$ an σ^4 sind sofort angebbar. Zunächst sind es die beiden Ebenen von Σ^5, die durch l selbst gehen, welche aus

$\varkappa$ 2 durch $\mathfrak{L}$ gehende Strahlen ausschneiden. Letztere sind durch $\mathfrak{L}R_1$ und $\mathfrak{L}R_2$ und auch durch $\mathfrak{L}H_1$ und $\mathfrak{L}H_2$ harmonisch getrennt; denn für eine beliebige Ebene π durch l liegt der Pol i. b. a. F_1^2 auf der Geraden $l_1 \equiv S_1S_1'$ harmonisch getrennt von dem Schnittpunkt von π und l_1 durch S_1 und S_1'. Und ebenso liegt der Pol von π i. b. a. k^2 auf R_1R_2 harmonisch getrennt von dem Schnittpunkt von π und R_1R_2 durch R_1 und R_2. Geht nun π durch einen der oben erwähnten Strahlen, so trifft die Verbindungslinie ihrer beiden Pole l, d. h. π gehört zu den Erzeugenden der Σ^5. Die beiden übrigen durch $\mathfrak{L}$ gehenden Tangenten der σ^4 werden hervorgerufen durch die Verbindungsebenen der Strahlen, in denen sich die Tangentialebenen von $\mathfrak{L}R_1$ und $\mathfrak{L}R_2$ an F_1^2 schneiden. Sie sind harmonisch getrennt durch $\mathfrak{L}R_1$ und $\mathfrak{L}R_2$ und auch durch $\mathfrak{L}V_1$ und $\mathfrak{L}V_2$. Die 8 Tangenten, die k^2 und σ^4 gemeinsam haben, berühren k^2 in den Punkten B_{12} . . . B_{82}. Auch die Geraden $S_{11}S_{11}'$ und $S_{12}S_{12}'$ gehören zu den Tangenten der σ^4.

Die erwähnten Strahlen, die durch $\mathfrak{L}R_1$, $\mathfrak{L}R_2$ und $\mathfrak{L}V_1$, $\mathfrak{L}V_2$ harmonisch getrennt sind, gehören aber auch zu den Geraden, welche die Regelfläche Q^6 erzeugen. Mithin ist die Kurve, in der $\varkappa$ die Q^6 schneidet, nur noch von 4. Ordnung und heiße daher q^4. Ihre 8 Schnittpunkte mit k^2 sind die Punkte B_{i2}.

Auch diese beiden Kurven erfahren Ausartungen, wenn F_1^2 die Ebene $\varkappa$ in E berührt; denn dann wird $\varkappa$ zur zweifachen erzeugenden Ebene von Σ^5, und die Restschnittkurve mit ihr kann daher nur noch von 3. Klasse sein. Die 3 Tangenten von $\mathfrak{L}$ an sie sind $\mathfrak{L}E$ und die beiden durch $\mathfrak{L}R_1$, $\mathfrak{L}R_2$ und $\mathfrak{L}H_1$, $\mathfrak{L}H_2$ harmonisch getrennten Strahlen. Auch wissen wir

bereits, daß hier nur 6 Punkte B_{i_2} vorhanden sind. Ebenso liegen in $\varkappa$ jetzt 3 Strahlen q_i, die Q^6 erzeugen. Daher ist die Schnittkurve von $\varkappa$ und Q^6 hier nur von 3. Ordnung. Dies ergibt noch den Satz:

„Gegeben 2 Kegelschnitte c^2 und k^2. Beschreibt c^2 eine Kegelschnittschar (dual einen Kegelschnittbüschel), so erzeugen die Seiten des c^2 und k^2 gemeinsamen Polardreiecks einen Strahlenbüschel 3. Klasse, die Eckpunkte dieses Dreiecks aber eine Kurve 3. Ordnung. Zu den Erzeugenden des Büschels gehören auch die Diagonalen des der Schar umschriebenen Vierseits."

Geht andererseits l durch den Pol K von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2, so reduziert sich σ^4 auf eine doppelt zählende Kurve 2. Klasse σ^2 und q^4 auf einen Kegelschnitt q^2. Es fällt nicht schwer, beide Kurven zu bestimmen. Jeder Geraden s in $\varkappa$ entspricht eine Gerade s_1, die sämtliche Pole von s i. b. a. unsere Kegelschnittschar enthält[1]). Schneidet nun s die Gerade $l_1 = V_1V_2$ in einem Punkte X, und ist X_1 der von X durch V_1 und V_2 harmonisch getrennt liegende Punkt, so ist $\mathfrak{L}XX_1$ ein Polardreieck der ganzen Schar, mithin $x = \mathfrak{L}X_1$ die gesuchte Gerade s_1. Da nun s eine beliebige Gerade durch X ist, so müssen auf x alle Pole des ganzen Strahlenbüschels liegen, das X zum Scheitel hat. Umgekehrt gehört zu jedem Punkte auf x der ganze Strahlenbüschel X(s) als die Gesamtheit aller seiner Polaren i. b. a. den Kegelschnittbüschel. Es sei ferner x_1 die Polare von X i. b. a. k^2. Schneiden sich nun x_1 und x in Y, so geht die Polare von Y i. b. a. k^2 durch X. Da man sich aber Y und y auch i. b. a.

[1]) Reye, G. d. L. I. S. 271.

den Kegelschnittbüschel einander zugeordnet denken kann, so ist Y ein Punkt der gesuchten Kurve und y ein Strahl des gesuchten Büschels. Beschreibt aber X die Punktreihe l_1, so beschreiben x und x_1 2 zu ihr involutorische Büschel mit den Scheitelpunkten $\mathfrak{L}$ und L_1. Der Schnittpunkt Y von x und x_1 erzeugt also eine Kurve 2. Ordnung, nämlich q^2, und seine Polare y erzeugt den Büschel 2. Klasse σ^2. Dabei geht q^2 durch $\mathfrak{L}$ und L_1 und σ^2 enthält $l_2 = R_1R_2$ und l_1 die Polare von L_1 i. b. a. k^2, als Strahlen. Die weitern Eigenschaften von q^2 und σ^2 gehen aus denen der allgemeinen Kurven sofort hervor.

28. Die sonstigen Eigenschaften von T^{10} sind denen des allgemeinen Torsus vollständig analog. Auch über die beiden erwähnten Ausartungen ist nichts Wesentliches mehr zu sagen. Ebenso brauchen die weitern Ausartungen der T^{10}, die hervorgerufen werden durch besondere Lage oder Gestalt von F_1^2 und k^2 nicht weiter untersucht zu werden, da sich dieselben aus 24. mittels des Prinzips der Dualität sofort ergeben. Doch sei der Fall auch hier noch ausführlich behandelt, in welchem k^2 identisch wird mit dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis, in welchem also der Punkt P ein Brennpunkt eines jeden der Kegelschnitte sein muß, die von den Ebenen π_i aus F_1^2 ausgeschnitten werden.

Fragen wir uns zunächst, was hier mit den Flächen Σ^5 und Q^6 geschieht. Offenbar fallen die Ebenen σ_i hier mit den Symmetrieebenen des Tangentialkegels $P(F_1^2)$ zusammen, während die q_i die Achsen dieses Kegels bilden. Denn nur so kann der unendlich ferne Punkt etwa von q_1 der Pol der uneigentlichen Geraden von σ_1 sein i. b. a. den imaginären Kugelkreis.

Da die Schnittgeraden des Kegels $P(F_1^2)$ und des Kegels $P(k^2)$ hier stets imaginär sind, gleichviel ob $P(F_1^2)$ reell oder imaginär ist, so müssen für jeden reellen Punkt P sowohl die σ_i als auch die q_i reell werden. Die Ebenen β_i und daher auch die Punkte $\mathfrak{B}_i$ werden alle imaginär; ebenso die Strahlen $\mathfrak{B}_i B_{i_1} B_{i_2}$. Letztere haben übrigens die Eigenschaft, daß sie auf sich selber senkrecht stehen, was ja von den Strahlen absoluter Richtung bekannt ist. Fällt P mit $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_1'$ zusammen, so ist die Tangentialebene eine σ_i und die Normale in $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_1'$ die zugehörige q_i.

Auch die beiden Ebenen σ_i, die mit l inzidieren, können leicht gefunden werden. Sie bilden das Normalebenenpaar, das durch die Tangentialebenen von l an F_1^2 harmonisch getrennt ist, also die Winkel zwischen diesen Tangentialebenen halbiert.

Σ^5 und Q^6 bleiben mithin hier vollständig erhalten, und wir können folgende Sätze aufstellen:

a) *„Die Symmetrieebenen aller Berührungskegel, die man von den Punkten einer Geraden an eine Fläche 2. Ordnung legen kann, umhüllen eine abwickelbare Fläche 5. Klasse; 2 Tangentialebenen dieser Fläche gehen durch die Gerade selbst.“*

b) *„Die Achsen aller Berührungskegel, die man von den Punkten einer Geraden an eine Fläche 2. Ordnung legen kann, erzeugen eine Regelfläche 6. Grades, welche die Gerade zur dreifachen Leitlinie hat und 16 imaginäre Torsallinien besitzt.“*

Geht l durch den Mittelpunkt von F_1^2, so erhält man mit Hilfe von 27. noch die folgenden Sätze:

a) *„Gegeben eine Fläche F_1^2 und eine Gerade l, die durch deren Mittelpunkt K geht. Konstruiert man aus 2 auf l zu K symmetrisch gelegenen Punkten die Berührungs-*

kegel an F_1^2, so sind die Achsen dieser Kegel paarweise parallel.“

b) „*Die Gesamtheit der so erzeugten Achsen aber bildet eine Regelfläche 6. Grades, die l zur dreifachen und einen in der unendlich fernen Ebene liegenden Kegelschnitt zur zweifachen Leitlinie hat.*“

Die Kenntnis der Achsen q_i ist von Wichtigkeit zur Bestimmung der zu dem Punkte P gehörigen reellen π_i. Es ist ja klar, daß von den 6 π_i hier stets nur 2 reell werden können, die übrigen aber paarweise konj. imaginär sind. Die Schnittgeraden zusammengehöriger π_i aber sind eben die Strahlen q_i. Die beiden reellen π_i findet man auf folgende Art. Man lege durch P eine beliebige Tangentialebene an F_1^2 und ziehe darin die Mantellinie t des Tangentialkegels; konstruiere hierauf die zu t i. b. a. den imaginären Kugelkreis konjugierte, in dieser Ebene liegende und durch P gehende Gerade, d. h. man errichte in P auf t die Normale t‘. Alsdann verbinde man beispielsweise q_1 mit t und t‘ durch die Ebene τ und τ'. Dann sind die beiden durch q_1 gehenden Ebenen, die sowohl durch σ_2 und σ_3 als auch durch τ und τ' harmonisch getrennt sind, die Ebenen π_1 und π_6. Natürlich werden π_1 und π_6 nur dann reell, wenn τ und τ' nicht durch σ_2 und σ_3 getrennt sind. Wäre dies der Fall, so müßte man dasselbe Verfahren bei q_2 oder q_3 wiederholen.

Ist F_1^2 eine Kugel, so tritt wieder der in 15c) behandelte Fall ein, so daß wir sagen können:

„*Gegeben eine Kugel und eine Gerade l. Diejenigen Ebenen, welche aus der Kugel Kreise ausschneiden, deren Mittelpunkte auf l liegen, umhüllen einen parabolischen Zylinder, der von l in einem Punkte berührt wird.*“

Anmerkung. Die oben angegebene Konstruktion der Ebenen π_i läßt sich natürlich auch allgemein anwenden, wenn eine der beiden Flächen F_i^2 reell, die andere aber imaginär ist, speziell in einen imaginären Kegelschnitt ausartet.

Der Ort der Nullpunkte eines Ebenenbüschels 2. Klasse Π^2 und die durch die Nullebenen der Punkte eines Kegelschnitts l^2 erzeugte abwickelbare Fläche.

29. Beschreibt die Ebene π einen Büschel Π^2 2. Klasse, dessen Scheitel P sei, so erzeugen die Nullpunkte P_i von π eine Kurve 20. Ordnung (vgl. 13.); sie sei l^{20} genannt. Wir wollen zuerst die Punkte von l^{20} aufsuchen, die in einer beliebigen Ebene π von Π^2 liegen. In π liegen zunächst die 6 Punkte P_i, die Nullpunkte der Ebene sind. Zieht man in π durch P eine beliebige Gerade l, so gibt es auf ihr i. a. 4 Punkte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, von deren Nullebenen je eine durch P geht (siehe 12.). Beschreibt aber l um P in π einen Strahlenbüschel, so erzeugen diese Nullebenen einen Ebenenbüschel höherer Klasse mit dem Scheitel in P. Außer den 4 auf diese Art erzeugten Ebenen dieses Büschels geht durch einen beliebigen Strahl des Büschels P(l) auch noch π selbst. Dieselbe ist nun sechsfache Ebene, da in ihr 6 Punkte P_i liegen. Durch l gehen also im ganzen $4 + 6 = 10$ Ebenen unseres Büschels. Die Nullebenen des Strahlenbüschels P(l) erzeugen mithin einen Ebenenbüschel 10. Klasse Π^{10}. Die Büschel Π^2 und Π^{10} haben nun

20 Ebenen gemeinsam. Es gibt also in der Ebene π i. a. 20 Punkte, von deren Nullebenen je eine Erzeugende von Π^2 ist. Diese Punkte sind also die Treffpunkte von π mit l^{20}.

Leichter lassen sich die 40 Punkte angeben, die l^{20} mit F_1^2 gemeinsam hat. 4 Ebenen von Π^2 berühren F_1^2; die Berührungspunkte seien $S_1 S_1' S_1'' S_1'''$. Nach jedem dieser Punkte fallen 4 P_i. Auch an F_2^2 gehen von Π^2 4 Tangentialebenen, die in S_2, S_2', S_2'', S_2''' berühren und aus F_1^2 je einen Kegelschnitt f_1^2 ausschneiden. Die Tangenten von S_2, S_2' . . . an diese Kurven berühren dieselben gleichfalls in Punkten der l^{20}, die auf F_1^2 liegen; sie mögen Q_{21}, Q_{22}; Q_{21}', Q_{22}'; Q_{21}'', Q_{22}''; Q_{21}''', Q_{22}''' genannt werden. Endlich hat der Kegel 8. Klasse $P(k^4)$ noch 16 Ebenen mit Π^2 gemeinsam, und die Punkte A_1, A_2 . . . A_{16} der k^4, die in diesen Ebenen liegen, sind ebenfalls Punkte der l^{20}. Damit sind die $4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 16 = 40$ Treffpunkte von l^{20} und F_1^2 bestimmt. Die Punkte der l^{20} auf F_2^2 sind: a) $S_2 S_2' S_2'' S_2'''$ je vierfach, Q_{11}, Q_{12}; Q_{11}', Q_{12}'; Q_{11}'', Q_{12}''; Q_{11}''', Q_{12}''' und $A_1, A_2 \ldots A_{16}$.

Dual dazu findet man. Beschreibt der Punkt P einen Kegelschnitt l^2 in der Ebene π, so erzeugen seine Nullebenen π_i eine abwickelbare Fläche 20. Klasse, die T^{20} heißen möge. Die 20 Tangentialebenen, die von einem Punkte P von l^2 an T^{20} gehen, lassen sich, wie folgt, angeben. Zieht man durch P in π eine Gerade l, so gibt es 4 Ebenen, die durch l gehen und auf l einen Nullpunkt haben. Beschreibt l um P einen Büschel, so erzeugen diese Nullpunkte eine Kurve 10. Ordnung, p^{10}. Die 20 Schnittpunkte von l^2 und p^{10} aber rufen die Ebenen hervor, die von P an T^{20} gehen.

Zu den 40 Tangentialebenen, die F_1^2 und T^{20} gemeinsam haben, gehören vor allen Dingen je vierfach die Berührungsebenen an F_1^2 in den 4 Punkten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_1''$, $\mathfrak{S}_1'''$, in welchen l^2 die Fläche F_1^2 trifft. Wenn ferner l^2 die Fläche F_2^2 in $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$, $\mathfrak{S}_2''$, $\mathfrak{S}_2'''$ schneidet, so gehören zu den gesuchten Ebenen die Tangentialebenen von $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_2'$ . . . an F_1^2, die F_1^2 in Punkten desjenigen Kegelschnittes berühren, den die Berührungsebenen in $\mathfrak{S}_2$ . . . an F_2^2 aus F_1^2 ausschneiden. Endlich schneidet l^2 den Torsus φ^4 in 16 Punkten; die Ebenen β_1, β_2 . . . β_{16} aber der φ^4, die durch diese Punkte gehen, gehören auch der Fläche T^{20} an. Die F_2^2 und T^{20} gemeinsamen Tangentialebenen findet man analog.

30. Wir wollen hier nur 2 Ausartungen näher untersuchen. Fürs erste sei Π^2 Berührungskegel an eine der F_i^2, etwa an F_2^2. Dann zerfällt l^{20} in mehrere Teilkurven niedrigerer Ordnung. Zu ihr gehört der Berührungskegelschnitt s_2^2, den Π^2 mit F_2^2 erzeugt; und zwar ist derselbe vierfach zu rechnen. Ferner gehört dazu die durch die Gesamtheit der $Q_{21}, Q_{22} \ldots Q_{22}'''$ erzeugte Kurve. Wie zu Anfang des III. Kapitels nachgewiesen werden wird, ist dieselbe von 8. Ordnung. Sie liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach auf F_1^2. Suchen wir die Punkte der q^8 — so wollen wir sie benennen — auf, die auf F_2^2 liegen. s_2^2 schneidet F_1^2, d. h. auch k^4 in 4 Punkten K_1, K_2 . . . K_4. Für die durch einen dieser Punkte gehende Ebene π fällt S_2 auf den Kegelschnitt f_1^2; also fallen auch die beiden Punkte Q_{21} und Q_{22} dorthin. Mithin berührt q^8 die Fläche F_2^2 in 4 Punkten. Außerdem hat der Kegel $P(k^4)$ mit Π^2 16 Ebenen gemeinsam. Von diesen fallen aber hier 4 Paare zu je zweien zusammen,

d. h. es gibt 4 gemeinsame Ebenen, die auch mit beiden Kegeln dieselben Mantellinien haben, eben die 4 durch die Schnittpunkte K_i von s_2^2 mit k^4 bestimmten. Wir haben also außerdem noch 8 gemeinsame Tangentialebenen. In ihnen fällt aber stets eine der Geraden S_2Q_{21} oder S_2Q_{22} mit einer der Schnittgeraden von π und F_2^2 zusammen. In diesen 8 Ebenen liegen also die weitern Schnittpunkte von q^8 mit F_2^2. In den Punkten K_i berührt übrigens q^8 auch Π^2. Die andern 4 Berührungspunkte von q^8 mit Π^2 liegen in den Schnittgeraden der Kegel $P(F_1^2)$ und Π^2. Denn die durch eine solche Gerade f_i gehende Ebene π enthält den Berührungspunkt von f_i mit f_1^2 als Punkt Q_{21} oder Q_{22}.

Berührt des Weitern π die Fläche F_1^2 in S_1, so fallen die beiden Tangenten von S_2 an f_1^2 mit S_2S_1 zusammen; man kann also jeden Punkt auf ihr als Schnittpunkt auffassen. Die Gerade S_2S_1 gehört demnach auch zur Kurve l^{20}. Das Gleiche geschieht in den Ebenen π, die F_1^2 in S_1', S_1'', S_1''' berühren. l^{20} zerfällt also in den vierfach zählenden Kegelschnitt s_2^2, in die Kurve q^8 8. Ordnung und in 4 durch S_1, S_1', S_1'', S_1''' gehende Gerade.

Für T^{20} findet man entsprechend: Liegt l^2 vollständig auf F_2^2, so zerfällt T^{20} in mehrere Torsen niederer Klasse. So gehört dazu der Kegel 2. Klasse σ_2^2, der F_2^2 längs der Kurve l^2 berührt; er zählt vierfach. Schneidet ferner die Tangentialebene an F_2^2 in einem Punkte P von l^2 die Fläche F_1^2 in einem Kegelschnitt, der von den 2 von P ausgehenden Tangenten in T_{21} und T_{22} berührt wird, so gehören auch die Tangentialebenen in T_{21} und T_{22} an F_1^2 zu den Ebenen der T^{20}. Die Gesamtheit dieser Ebenen aber erzeugt

eine abwickelbare Fläche 8. Klasse, die τ^8 heißen möge. Ihre Ebenen sind alle Tangentialebenen von F_1^2. Zu den τ^8 und F_2^2 gemeinsamen Berührungsebenen gehören zunächst die Tangentialebenen an F_2^2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, die σ_2^2 und F_2^2 gemeinsam haben; jede dieser Ebenen aber ist zweifach zu rechnen. Die übrigen, τ^8 und F_2^2 gemeinsamen Ebenen sind die 8 Ebenen β_i, die nicht identisch werden mit den σ_2^2 und φ^4 gemeinsamen Ebenen.

Bezeichnen wir schließlich noch die Geraden durch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_1''$, $\mathfrak{S}_1'''$ (wo l^2 die F_1^2 trifft), die zugleich dort F_1^2 und F_2^2 berühren mit s, s', s'', s''', so kann etwa $\mathfrak{S}_1$ für jede durch s gehende Ebene als Nullpunkt aufgefaßt werden. Das Gleiche gilt für $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_1''$, $\mathfrak{S}_1'''$. Mithin gehören auch die 4 Ebenenbüschel, die s, s', s'', s''' zu Achsen haben, zu unserer Fläche T^{20}. Dieselbe ist dadurch vollständig bestimmt.

31. Von größerer Bedeutung aber ist der Fall, in welchem der Scheitel von Π^2 nach einem Eckpunkt des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Poltetraeders $R_1R_2R_3R_4$, etwa nach R_1 fällt und Π^2 identisch wird mit dem Kegel $R_1(k^4)$. Wenden wir die Bezeichnung von 7. an. Nach diesem Art. berühren sich in jeder Ebene π von Π^2 die beiden Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 in 2 Punkten A und A', wohin auch 2 der Punkte P_i fallen; die übrigen 4 Punkte P_i aber fallen in einem Punkte N zusammen, der auf der Schnittgeraden r_1 von π mit ϱ_1 liegt. Bezeichnet man noch den Schnittpunkt von r_1 und n mit O, so ersieht man, daß N und O harmonisch liegen zu den Schnittpunkten von r_1 sowohl mit f_1^2 als auch mit f_2^2, d. h. auch zu den Schnittpunkten von r_1 mit k_{11}^2 und k_{12}^2. Da aber der Kegelschnitt k^2, den ϱ_1 aus $R_1(k^4)$ ausschneidet,

auch durch die Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 geht und von r_1 in O berührt wird, so liegen N und O harmonisch zu jedem Kegelschnitt des durch M_1, M_2, M_3, M_4 bestimmten Büschels, N und O sind Doppelpunkte einer Involution. 1 Kegelschnitt des Büschels berührt r_1 in N, wie k^2 in O berührt.

Beschreibt nun π den Büschel Π^2, so durchlaufen A und A' die Kurve k^4, also eine Kurve 4. Ordnung, die zur l^{20} gehört. r_1 erzeugt den Strahlenbüschel 2. Klasse k^2. Welche Kurve aber ruft N hervor? Da NA und NA' auch Tangenten der k^4 in A bezw. A' sind, so muß die von N erzeugte Kurve eine Doppelkurve der abwickelbaren Fläche sein, die von den Tangenten der k^4 gebildet wird. Sie ist offenbar von $16 : 4 = 4$. Ordnung. Man kann dies auf folgende Art beweisen. Zu geben brauchen wir uns nur k^2 und $k_{11}{}^2$, da dann N auf der Tangente r von k^2 schon bestimmt ist. Soll nun ein solcher Punkt N auf einer beliebigen Geraden s in ϱ_1 liegen, so müssen die Polaren dieses Punktes i. b. a. k^2 und $k_{11}{}^2$ sich in einem Punkte von k^2 schneiden. Durchläuft aber 1 Punkt die Gerade s, so beschreibt der Schnittpunkt seiner Polaren i. b. a. die erwähnten Kegelschnitte eine Kurve 2. Ordnung. Da diese Kurve nun k^2 in 4 Punkten schneidet, so müssen auf s im ganzen 4 Punkte der durch N erzeugten Kurve liegen; dieselbe ist also von 4. Ordnung, sie heiße r^4.

Die Kurve r^4 schneidet $k_{11}{}^2$ in den 4 Berührungspunkten der $k_{11}{}^2$ und k^2 gemeinsamen Tangenten, und außerdem noch in M_1, M_2, M_3, M_4. Da sie in diesen Punkten M_1, . . . M_4 die k^2 nicht durchdringt, so muß sie den Kegelschnitt daselbst berühren.

Soll r^4 einen Doppelpunkt D haben, so muß man von ihm an k^2 2 Tangenten legen können, deren Berührungspunkte harmonisch getrennt sind durch ihre Schnittpunkte mit k_{11}^2. Solche Punkte sind aber die Eckpunkte des k^2 und k_{11}^2 gemeinsamen Polardreiecks, d. h. die Punkte R_2, R_3, R_4. Da indessen einer dieser Punkte stets im Innern von k^2 liegen muß, so hat r^4 2 Doppelpunkte und einen isolierten Punkt.

Bestehen k^2 und k_{11}^2 aus Ellipsen und sind alle 4 M_i reell, so besteht r^4 außer dem Punkte R_4 aus 4 hyperbelartigen Ästen, von denen 2 gegenüberliegende einen der beiden andern in R_2 und R_3 schneiden Die 4 Punkte, die r^4 mit der unendlich fernen Geraden gemein hat, sind hier alle reell[1]).

Wir können also sagen:

„*Ist $R_1R_2R_3R_4$ das F_1^2 und F_2^2 gemeinsame Polfetraeder und k^4 die Schnittkurve dieser Flächen, so erzeugen die Nullpunkte der Tangentialebenen des Kegels $R_1(k^4)$ außer k^4 noch eine vierfach zählende Kurve 4. Ordnung, die ganz in der Ebene $R_2R_3R_4 \equiv \varrho_1$ liegt und R_2, R_3, R_4 zu Doppelpunkten hat.*“

Gleichzeitig ergibt sich folgender Satz:

„*Gegeben ein Büschel von Flächen 2. Ordnung mit der Grundkurve k^4 und dem gemeinsamen Polfetraeder $R_1R_2R_3R_4$. Berührt eine Ebene π den Kegel $R_1(k^4)$ in der Geraden n und schneidet die Ebene $\varrho_1 \equiv R_2R_3R_4$ in der Geraden r_1, so hat n i. b. a. alle Kegelschnitte, die π aus dem Flächenbüschel ausschneidet, denselben Pol N, der auf r_1 liegt. Der Schnittpunkt von n und r_1 und N sind Doppelpunkte einer Involution, die auf r_1 durch die Schnittpunktpaare mit den erwähnten Kegelschnitten hervorgerufen wird. Beschreibt π den*

[1]) Vgl. auch Ch. Wiener, D. G. II, S. 311.

Büschel 2. Klasse $R_1(l^4)$, so erzeugt N eine ebene Kurve 4. Ordnung, die in ϱ_1 liegt und R_2, R_3, R_4 zu Doppelpunkten hat."

Der hierzu duale Fall tritt ein, wenn l^2 identisch wird mit dem Doppelkegelschnitt, in welchem die Ebene ϱ_1 die abwickelbare Fläche φ^4 schneidet. Die Fläche T^{20} besteht dann aus φ^4 selbst und einem vierfach zählenden Ebenenbüschel 4. Klasse ϱ^4, das den Pol R_1 von ϱ_1 zum Scheitel und die Ebenen ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 zu Doppelebenen hat.

Dual ergibt sich folgender Satz:

„*Gegeben eine Schar von Flächen 2. Klasse mit dem Grundtorsus φ^4 und dem gemeinsamen Polartetraeder $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4$, dessen Eckpunkte R_1, R_2, R_3, R_4 sind. Die Tangente t in einem Punkte P des Kegelschnittes $l^2 \equiv (\varrho_1, \varphi^4)$ hat dann i. b. a. alle Tangentialkegel, die man von P an die Flächen 2. Klasse legen kann, dieselbe Polarebene ν, die durch PR_1 geht. Die Ebenen ν und $R_1(t)$ sind Doppelebenen einer Involution, die erzeugt wird durch die Tangentialebenen von R_1P an die genannten Flächen 2. Klasse. Beschreibt P die Kurve l^2, so umhüllt ν einen Ebenenbüschel 4. Klasse, der R_1 zum Scheitel und ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 zu Doppelebenen hat.*"

Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist der, in welchem F_1^2 und F_2^2 konfokal sind (oder F_2^2 mit dem imaginären Kugelkreis zusammenfällt). Die Ebenen ϱ_i bestehen dann aus den Symmetrieebenen von F_1^2 und F_2^2 und aus der unendlich fernen Ebene. Als Kegelschnitt l^2 kann daher eine der Fokalkurven genommen werden. Ihre Punkte P sind dann Brennpunkte der Kegelschnitte, welche die zugehörigen π_i aus F_1^2 und F_2^2 ausschneiden, und die oben mit ν bezeichnete Ebene steht immer senkrecht in P auf der Tangente an l^2 daselbst und geht durch den unendlich fernen Punkt der Achse, die auf der Ebene von l^2 senkrecht steht,

d. h. sie steht immer senkrecht auf dieser Ebene. Aus ϱ^4 wird also hier ein Zylinder.

Unsere Ergebnisse können wir also folgendermaßen aussprechen:

a) „*Gegeben 2 konfokale Flächen F_1^2 und F_2^2 2. Ordnung. Einem Punkte P seien als Nullebenen die Ebenen zugeordnet, die aus F_1^2 und F_2^2 Kegelschnitte ausschneiden, welche P zum Brennpunkte haben. Beschreibt P eine Fokalkurve l^2 der beiden Flächen, so umhüllen seine Nullebenen außer der „Fokaldeveloppabeln“ noch einen vierfach zählenden Zylinder 4. Klasse, der auf der Ebene von l^2 senkrecht steht und die beiden andern F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Symmetrieebenen sowie die unendlich ferne Ebene als Doppeltangentialebenen enthält. Die Schnittkurve dieses Zylinders mit der Ebene der l^2 ist die Evolute von l^2.*“

b) „*Gegeben eine Schar konfokaler Flächen 2. Ordnung mit der Fokaldeveloppabeln φ^4, den Symmetrieebenen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und der unendlich fernen Ebene ϱ_4. Die Pole dieser Ebenen seien R_1, R_2 . . . R_4. Dann hat die Tangente t in einem Punkte P der Fokalkurve $l^2 \equiv (\varrho_1, \varphi^4)$ i. b. a. alle Tangentialkegel, die man von P an die Flächen der Schar legen kann, dieselbe Polarebene ν, die auf ihr senkrecht steht*[1]*. Beschreibt P die Kurve l^2, so umhüllt ν einen Zylinder 4. Klasse.*“

III. Kapitel.

Der Ort der Nullpunkte eines Ebenenbündels P und die von den Nullebenen der Punkte eines ebenen Feldes ε umhüllte Fläche.

32. Da nach 1. die Charakteristiken des Nullsystems $\alpha = 6$ und $\gamma = 4$ sind, so erzeugen die Null-

[1]) Soweit findet sich der Satz auch bei Salm.-Fiedler, A. G. d. R. I, 165.

punkte eines Ebenenbündels i. a. eine Fläche von $6 + 4 = 10$. Ordnung. Die durch die Nullebenen der Punkte einer Geraden l erzeugte abwickelbare Fläche ist nämlich nach 14. von 10. Klasse, d. h. durch einen beliebigen Punkt P außerhalb oder auf l gehen 10 Ebenen, wovon je ein Nullpunkt auf l liegt. Von der Gesamtheit der durch den Ebenenbündel P erzeugten Nullpunkte liegen also 10 auf der Geraden l, die hervorgerufene Fläche wird von l in 10 Punkten getroffen, ist also von 10. Ordnung. Sie soll daher P^{10} genannt werden. Der Scheitelpunkt P selbst ist ein sechsfacher Punkt von P^{10}.

Zuerst sei die Schnittkurve von P^{10} mit einer der Flächen F_1^2, sagen wir F_1^2, untersucht. Sie ist von 20. Ordnung, zerfällt aber in mehrere Teilkurven von niedrigerer Ordnung. Um sie zu finden, brauchen wir nur die Kurven aufzusuchen, die von den in 3. mit S_1, S_1'; $A_1, A_2 \ldots A_8$; $Q_{21}, Q_{22}, Q_{21}', Q_{22}'$ bezeichneten Punkten beschrieben werden. Sofort klar ist, daß S_1 und S_1' den Berührungskegelschnitt s_1^2 des Tangentialkegels von P an F_1^2 erzeugen. Da in jedem Punkt von s_1^2 4 Nullpunkte zusammenfallen, so ist der Kegelschnitt vierfach zu zählen. Und da die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_8$ auf der Schnittkurve von F_1^2 und F_2^2 liegen, so beschreiben dieselben die Kurve k^4 4. Ordnung. In ihr durchdringt P^{10} sowohl F_1^2 als auch F_2^2. Die Restkurve muß mithin noch von $20 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 8$. Ordnung sein; sie heiße r_1^8. Erzeugt wird sie durch die Punkte $Q_{21}, Q_{22}, Q_{21}', Q_{22}'$, also durch je 2 der Nullpunkte der Tangentialebenen, die man von P an F_2^2 legen kann. Es ist das dieselbe Kurve, auf die wir schon in 30. kamen und dort mit q^8 bezeichneten. An derselben Stelle wurden auch ihre Eigenschaften

näher dargelegt. Bemerkt sei nur noch, daß die r_1^8 gewöhnlich aus 4 Kurvenzügen besteht, die den zweien der k^4 ähnlich sind. 2 davon können aber auch ineinander übergehen und einen Kurvenzug bilden, welcher der k^4 ähnlich ist, wenn diese eine zusammenhängende Kurve bildet.

Die Schnittkurve von P^{10} und F_2^2 besteht aus s_2^2 vierfach, aus k^4 und r_2^8 je einfach.

33. Von besonderer Wichtigkeit ist hier die Frage nach den Doppelkurven der P^{10}. 2 von ihnen wurden bereits erwähnt; es sind die Kegelschnitte s_1^2 und s_2^2, längs derer P^{10} sich selbst berührt. Seinen Grund hat dies darin, daß von den 4 Punkten, in welchen eine Mantellinie des Kegels $P(s_i^2)$ die P^{10}, außer P, schneidet, jeder nach dem Schnittpunkt derselben mit s_i^2 fällt. Gibt es nun noch mehr Strahlen durch P, für die 2 oder mehrere dieser Treffpunkte zusammenfallen? Zunächst sind hier die 4 durch P gehenden Kongruenzstrahlen zu erwähnen. Dieselben sind dreifache Geraden der P^{10}; denn jeder Punkt auf einer von ihnen, etwa auf a', ist Nullpunkt von 3 Ebenen des Büschels, der a' zur Achse hat. Im Punkte P aber fallen die 12 Ebenen paarweise zusammen, so daß P nur sechsfacher Punkt von P^{10} ist.

Soll auf irgend einem weitern Strahl d durch P ein Punkt D einer etwaigen Doppelkurve liegen, so muß dieser Strahl einer der durch D bestimmten q_i sein, d. h. d muß i. b. a. die beiden Kegel $D(F_1^2)$ und $D(F_2^2)$ dieselbe Polarebene haben. Dann müssen aber die durch d gehenden Tangentialebenen an die zugehörige abwickelbare Fläche Σ^5 durch denselben Punkt auf d, eben durch D, erzeugt werden. Die Strahlen der diesen Punkt hervorrufenden Regelschar

(es sind nach 6. deren zwei) müssen folglich alle in einer Ebene liegen, da 2 von ihnen dies tun. Mithin müssen sich die Polaren von d i. b. a. F_1^2 und F_2^2 in derselben Ebene befinden. Unsere Frage lautet also: Gibt es Strahlen durch P, deren Polaren i. b. a. F_1^2 und F_2^2 sich schneiden, und welcher Art ist der von ihnen erzeugte Kegel?

Wir geben uns einen beliebigen Strahlenbüschel, dessen Scheitel P und dessen Ebene δ sei. Die Polaren dieses Büschels bilden ebenfalls 2 Strahlenbüschel, die in den Polarebenen δ_1 und δ_2 von P liegen und die Pole D_1 und D_2 von δ zu Scheiteln haben. Die Polaren von d seien d_1 und d_2. Wir legen durch D_1D_2 und d_1, sowie durch D_1D_2 und d_2 die Ebenen ε_1 und ε_2. Beschreibt nun d den Büschel um P in δ, so erzeugen ε_1 und ε_2 2 projektive Ebenenbüschel mit derselben Achse D_1D_2. Da dieselben nun 2 Ebenen entsprechend gemein haben, so gibt es in dem Strahlenbüschel P(d) i. a. 2 Strahlen, deren Polaren i. b. a. F_1^2 und F_2^2 sich schneiden. Diese Strahlen erzeugen also einen Kegel 2. Grades, den wir D^2 nennen wollen.

Zu den Erzeugenden des D^2 gehören auch die 4 Strahlen PR_1, PR_2 . . . PR_4; denn ihre Polaren liegen bez. in den Ebenen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4. Die zugehörigen Punkte der Doppelkurve sind die Schnittpunkte L_i von PR_i mit ϱ_i. Ebenso gehören dazu die 3 Strahlen q_i, die durch P_i selbst erzeugt werden. Für sich ergeben sich daraus folgende Sätze.

a) „*Die durch einen Punkt gehenden Strahlen, deren Polaren i. b. a. 2 Flächen 2. Ordnung F_1^2 und F_2^2 sich schneiden, erzeugen einen Kegel 2. Grades, der durch die Eckpunkte des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Poltetraeders geht.*“

b) „*Gegeben ein Punkt P und 2 Flächen 2. Ordnung* F_1^2 *und* F_2^2 *mit dem gemeinsamen Polytraeder* $R_1R_2R_4R_4$. *Dann liegen die Kanten des den Kegeln* $P(F_1^2)$ *und* $P(F_2^2)$ *gemeinsamen Polardreikants mit den Strahlen* PR_1, PR_2, PR_3, PR_4 *auf einem Kegel 2. Grades.*“

Da also P selbst dreifacher Punkt unserer Doppelkurve ist, so ist dieselbe von 5. Ordnung; denn in jeder Ebene durch P liegen 5 Punkte derselben. Sie heiße d^5. Außer P hat sie keinen Doppelpunkt oder vielfachen Punkt mehr. Es ist leicht, die Schnittpunkte von d^5 mit der Polarebene δ_1 von P i. b. a. F_1^2 zu finden. Der Kegel D^2 schneidet den Kegel $P(s_1^2)$ in 4 Geraden, die Tangenten an F_1^2 sind; die auf diesen Tangenten liegenden Nullpunkte aber fallen mit ihren Berührungspunkten zusammen, welche in δ_1 liegen. Ist ferner P′ der Pol von δ_1 i. b. a. F_2^2 und $\mathfrak{P}_1$ der Schnittpunkt von PP′ mit δ_1, so ist $\mathfrak{P}_1$ der 5. Punkt von d^5, der in δ_1 liegt. Der Strahl $\mathfrak{P}_1P'P$ hat nämlich i. b. a. den Kegel $\mathfrak{P}_1(F_1^2)$ sowohl als auch auf den Kegel $\mathfrak{P}_1(F_2^2)$ dieselbe Polarebene, nämlich δ_1 selber. Analog sind die Schnittpunkte von d^5 mit δ_2 zu finden.

Auch die Schnittpunkte von d^5 mit ϱ_1 können wir feststellen. Zu ihnen gehört, wie bereits erwähnt, der Schnittpunkt L_1 von PR_1 mit ϱ_1. Soll in ϱ_1 noch ein weiterer Punkt D von d^5 liegen, so ist dies nur möglich, wenn die beiden Kegel $D(F_1^2)$ und $D(F_2^2)$ nicht ein, sondern unendlich viele Polardreikante gemeinsam haben, wenn sich also die beiden Kegel zweifach berühren. Dann muß aber D auf der in ϱ_1 sich befindenden Doppelkurve l_1^2 der abwickelbaren Fläche φ^4 liegen. Es gibt also noch 4 weitere Punkte D von d^5 in ϱ_1, nämlich die Schnittpunkte von l_1^2 mit

dem Kegelschnitt, in welchem ϱ_1 den Kegel D^2 schneidet. In der Tat gibt es ja auch durch P 4 Ebenen, die Nullpunkte auf l_1^2 haben, nämlich die Tangentialebenen von P an die von den Nullebenen der Punkte von l_1^2 erzeugten abwickelbaren Fläche (vgl. 31).

Jetzt sind wir aber auch imstande, etwas Näheres über die Schnittkurve von P^{10} mit ϱ_1 zu sagen. Sie zerfällt in 2 Teilkurven 4. und 6. Ordnung. In 16. wurde nämlich dargetan, daß für einen Ebenenbüschel, dessen Achse durch R_1 geht, (also hier PR_1 ist) die Kurve l^{10} zerfällt in eine 6. Ordnung und eine solche 4. Ordnung, welch letztere ganz in ϱ_1 liegt. Diese gehört also zu unserer Schnittkurve. Sie hat L_1 zum Doppelpunkt, berührt k_{11}^2 und k_{12}^2 in den Schnittpunkten von ϱ_1 mit s_1^2 bezw. s_2^2 und schneidet diese Kegelschnitte außerdem noch in M_1, M_2, M_3, M_4. Die Kurve 6. Ordnung aber, die in ϱ_1 liegt, berührt k_{11}^2 und k_{12}^2 gleichfalls in den Schnittpunkten von ϱ_1 mit s_1^2 und s_2^2 und schneidet sie außerdem noch in den Schnittpunkten von ϱ_1 mit r_1^8 bezw. r_2^8. Die beiden Kurven 4. und 6. Ordnung aber berühren sich zweimal in Punkten der s_1^2, zweimal in Punkten der s_2^2 und schneiden sich in den 4 Punkten von d^5, die auf l_1^2 liegen. Außerdem treffen sie sich in den Schnittpunkten von ϱ_1 mit den durch P gehenden Strahlen a', b', c', d'. Dieselben sind aber einfache Punkte der Kurve 4. und Doppelpunkte der Kurve 6. Ordnung und sind daher doppelt zu rechnen. Endlich müssen die Kurven sich noch in weitern 4 Punkten schneiden.

34. Durch hierzu reziproke Betrachtungen findet man, daß die Nullebenen der Punkte eines ebenen Feldes ε i. a. eine Fläche 10. Klasse umhüllen; wir wollen sie ε^{10} nennen. Die von einer beliebigen Ge-

raden l an ε^{10} gehenden Tangentialebenen findet man, indem man die zu dem Ebenenbüschel $l(\pi)$ gehörige Nullkurve l^{10} mit ε zum Schnitte bringt. Die Verbindungsebenen von l mit je einem dieser 10 Schnittpunkte sind die gesuchten. Bezeichnen wir noch die Schnittkurve von ε mit der Fläche F_i^2 mit f_i^2 und ihren Pol i. b. a. dieselbe Fläche mit E_i. Zu der abwickelbaren Fläche der F_1^2 und ε^{10} gemeinsamen Tangentialebenen gehört dann der Ebenenbüschel 2. Klasse $E(f_1^2)$ vierfach und der Torsus φ^4 einfach. Die Restfläche heiße, da sie noch von 8. Klasse ist, P_1^8. Sie ist identisch mit der in 30. τ^8 genannten und braucht daher nicht weiter untersucht zu werden. F_2^2 und ε^{10} erzeugen durch ihre gemeinsamen Berührungsebenen $E_2(f_2^2)$, ebenfalls φ^4 und dann noch P_2^8.

Zu den abwickelbaren Flächen der mehrfachen Berührungsebenen der ε^{10} gehören vor allem die beiden Ebenenbüschel $E_1(f_1^2)$ und $E_2(f_2^2)$, da ε^{10} sich längs der Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 selbst berührt. Ferner gehören dazu die 4 Ebenenbüschel 1. Klasse, deren Träger die in ε liegenden Kongruenzstrahlen a, b, c, d sind. Jede Ebene dieser Büschel ist dreifache Berührungsebene. Außerdem erzeugen die zweifachen Berührungsebenen noch eine abwickelbare Fläche 5. Klasse, Δ^5. Dieselbe enthält ε als dreifache Ebene und wird noch von ihr in einem Strahlenbüschel 2. Klasse δ^2 geschnitten. Die durch einen beliebigen Punkt P von ε gehenden Strahlen von δ^2 findet man wie folgt. Dem Strahlenbüschel P(p) in ε entsprechen polarreziprok 2 Strahlenbüschel, deren Scheitel E_1 und E_2 und deren Ebenen die Polarebenen von P i. b. a. F_1^2 und F_2^2 sind. Beide mögen $E_1(p_1)$ und $E_2(p_2)$ heißen. Auf der Schnittgeraden der Trägerebenen

entstehen so 2 projektive Punktreihen. Da diese i. a. 2 Doppelpunkte haben, so gibt es durch P 2 Strahlen p, deren Polarenpaare sich schneiden. Diese 2 Strahlen aber sind Erzeugende von δ^2. Zu δ^2 gehören auch die 4 Geraden, in welchen ε die Ebenen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ϱ_4 schneidet; ebenso die Seiten des f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Polardreiecks. Reziprok zu den in voriger Nummer angeführten Sätzen ergibt sich also:

a) *„Die in einer Ebene ε liegenden Strahlen, deren Polaren i. b. a. 2 Flächen 2. Ordnung F_1^2 und F_2^2 sich schneiden, erzeugen einen Büschel 2. Klasse, zu dem auch die Schnittgeraden von ε mit den Ebenen des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polartetraeders gehören.“*

b) *„Gegeben 2 Flächen 2. Ordnung F_1^2 und F_2^2 mit dem gemeinsamen Polartetraeder $\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4$ und eine Ebene ε, die F_1^2 und F_2^2 in den Kegelschnitten f_1^2 und f_2^2 schneidet. Dann gehören die Seiten des f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Polardreiecks und die Strahlen (ε, ϱ_1), (ε, ϱ_2), (ε, ϱ_3) und (ε, ϱ_4) zu demselben Büschel 2. Klasse.“*

Von den 5 Tangentialebenen an Δ^5, die durch E_1 gehen, werden 4 erzeugt durch die δ^2 und f_1^2 gemeinsamen Tangenten. Die 5. aber ist die Verbindungsebene von E_1 mit der Geraden, in welcher sich ε und die Polarebene ε' von E_1 i. b. a. F_2^2 sich schneiden. Für E_2 hat man 5 analoge Ebenen. Auch die 5 durch einen Eckpunkt R_1 des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Polartetraeders gehenden Ebenen der Δ^5 sind leicht anzugeben. Vier davon sind die gemeinsamen Tangentialebenen der Kegel $R_1(k^4)$ und $R_1(\delta^2)$. Die 5. Ebene aber entsteht durch die Verbindungen R_1 mit der Geraden (ε, ϱ_1).

Der Tangentialkegel von R_1 an ε^{10} zerfällt in 2 Teilkegel von 4. bezw. 6. Klasse. Der erstere wird

erzeugt durch die Nullebenen der Geraden (ε, ϱ_1). Die Verbindungsebene dieser Geraden mit R_1 hat er zur Doppelebene. Die beiden Kegel berühren sich längs denjenigen Mantellinien der Kegel $R_1(F_1^2)$ und $R_1(F_2^2)$, die in den Tangentialebenen von R_1 an die Kegel $E_1(f_1^2)$ und $E_2(f_2^2)$ liegen. Zu den weitern gemeinsamen Tangentialebenen unserer Kegel gehören dann die 4 Berührungsebenen von $R_1(k^4)$, die zu Δ^5 zu rechnen sind und die Verbindungsebenen von R_1 mit den in ε liegenden Kongruenzstrahlen a, b, c, d. Letztere sind aber als Doppelebenen des Kegels 6. Klasse zweifach zu rechnen.

35. Von den in Betracht kommenden Ausartungen ist natürlich wieder jene die einfachste, in welcher F_1^2 und F_2^2 sich längs des Kegelschnittes k^2 berühren. P^{10} zerfällt dann in eine vierfach zählende Fläche 2. Ordnung und in 2 Ebenen. Der Beweis ist folgender. Jede Ebene π durch P schneidet die Ebene $\varkappa$ in einem Strahle p; der Nullpunkt K von π aber liegt auf der Polaren p' von p i. b. a. F_1^2 und F_2^2. Beschreibt nun π einen Bündel, so erzeugt p das ebene Feld $\varkappa$, p' aber einen zu dem Ebenenbündel reziproken Strahlenbündel mit dem Scheitel in dem Pol K von $\varkappa$. Die Schnittpunkte entsprechender Elemente erzeugen also eine Fläche 2. Ordnung, die durch P und K geht.

Die Schnittkurve dieser Fläche mit einer der Flächen F_i^2 besteht aus den beiden Kegelschnitten k^2 und s_i^2. Die Ebene des Bündels, welche die Fläche in P berührt, ist die Verbindungsebene von P mit der Polaren von PK. Dieselbe geht natürlich durch die Schnittpunkte von k^2 mit s_1^2 oder, was dasselbe ist, von k^2 und s_2^2.

Als Ausartung betrachtet gehen aber durch P

noch 2 weitere Ebenen, die ihn zum Nullpunkt haben, nämlich die Berührungsebenen von PK an F_1^2 und F_2^2, die in V_1 und V_2 beide Flächen berühren. Da die Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2 in diesen Ebenen also beide mit dem Punkte V_1 bezw. V_2 identisch werden, so kann man jeden Punkt in einer dieser Ebenen als ihren Nullpunkt ansehen, d. h. die beiden Ebenen PKV_1 und PKV_2 sind Teile der Fläche P^{10}.

Bemerkt sei noch, daß hier jeder Strahl durch P die Eigenschaft hat, die im allgemeinen Fall nur die Mantellinien des Kegels D^2 aufweisen. Es existieren aber trotzdem Doppelkurven, nämlich PK und die 4 Geraden, in denen die Ebenen PKV_i unsere Fläche 2. Ordnung schneiden, also die Strahlen PV_1, PV_2, KV_1, KV_2.

Die Schnittkurve einer beliebigen Ebene unseres Bündels mit P^{10} besteht hier aus 2 durch P gehenden Geraden und einem durch P gehenden Kegelschnitt. Letzterer ist leicht zu finden. Schneidet nämlich irgend eine durch P gehende Gerade a den Strahl p in A, so hat man nur die Polare a_1 von A i. b. a. f_1^2 und f_2^2 zu suchen. a_1 schneidet dann a in einem Punkte B der Kurve. a und a_1 beschreiben nun 2 projektive Strahlenbüschel um P und K, ihr Schnittpunkt also einen Kegelschnitt.

Liegt aber P selbst in der Ebene $\varkappa$, so zerfällt dieser Kegelschnitt in die beiden Geraden p und p_1, wo p_1 die Polare von P i. b. a. f_1^2 und f_2^2 ist. Die Fläche 2. Ordnung zerfällt also hier in die Ebene $\varkappa$ und in die Polarebene von P i. b. a. F_1^2 und F_2^2. Die beiden Tangentialebenen PKV_1 und PKV_2 bleiben auch hier erhalten.

Dual dazu kann man sagen: Berühren sich F_1^2 und F_2^2 längs eines Kegelschnittes k^2, so zerfällt ε^{10} in eine Fläche 2. Klasse, die vierfach zählt, und 2 Ebenenbündel. Nennt man nämlich die Verbindungslinie eines beliebigen, in ε liegenden Punktes P mit K p und deren Polare, i. b. a. F_1^2 und F_2^2, p', so geht die Nullebene π von P durch p'. Beschreibt nun P das ebene Feld ε, so erzeugt p einen Strahlenbündel mit dem Scheitel in K, p' also ein hierzu reziprokes ebenes Feld in der Ebene $\varkappa$. Die Verbindungsebenen der Punkte P mit den entsprechenden p' rufen also einen Ebenenbündel 2. Ordnung hervor, sie umhüllen eine Fläche 2. Klasse. Auch ε und $\varkappa$ gehören diesem Ebenenbündel an Die abwickelbare Fläche der gemeinsamen Berührungsebenen von dieser Fläche und F_i^2 zerfällt in die beiden Ebenenbüschel 2. Klasse $K(k^2)$ und $E_i(f_i^2)$.

Zur vollständigen Fläche ε^{10} gehören aber noch die beiden Ebenenbündel, die die Schnittpunkte K_1 und K_2 von ε und k^2 zu Scheiteln haben; denn für jede Ebene etwa durch K_1 kann man K_1 als einen Nullpunkt betrachten.

Der Tangentialkegel von irgend einem Punkt P in ε an ε^{10} zerfällt also hier in 2 Ebenenbüschel 1. Klasse mit PK_1 und PK_2 als Achsen und einen Ebenenbüschel 2. Klasse, der vierfach zählt. Die Ebenen des letztern findet man auf folgende Art. Man ziehe durch P in ε einen Strahl l und zeichne den zur Ebene $l(K)$ i. b. a. die Tangentialkegel $P(F_1^2)$ und $P(F_2^2)$ konj. Durchmesser s. Die Ebene (l, s) ist dann eine Ebene des gesuchten Büschels.

Geht ε durch den Punkt K selbst, so zerfällt auch noch die Fläche 2. Klasse in 2 Ebenenbündel,

deren Scheitel der Punkt K und der Pol E von ε i. b. a. F_1^2 und F_2^2 sind.

36. Nehmen wir jetzt den Fall, in welchem F_1^2 und F_2^2 sich in 2 Kegelschnitten schneiden, also sich in 2 Punkten C_1 und C_2 berühren. Die beiden Kurven s_1^2 und s_2^2, in denen P^{10} die Flächen F_i^2 berührt, bleiben erhalten. Dagegen erhält k^4 hier 2 Doppelpunkte, eben C_1 und C_2. Aber auch die Kurven r_1^8 und r_2^8 haben in C_1 und C_2 Doppelpunkte. Die Tangentialebene an F_1^2 in C_1 z. B. schneidet nämlich F_1^2 in 2 Strahlen, die beide durch C_1 gehen. Legt man nun durch einen dieser Strahlen und P die Ebene, so ist dies eine Tangentialebene an F_1^2. 4 ihrer Nullpunkte fallen also auf s_1^2, ein weiterer aber nach C_1. Also ist C_1 Doppelpunkt von r_1^8 und daher auch von r_2^8.

Was aber wird hier aus dem Kegel D^2? Seien die beiden Schnittkurven von F_1^2 und F_2^2 mit c_1^2 und c_2^2, der Strahl C_1C_2 mit c und dessen Polare mit c' bezeichnet. Von dem Polartetraeder, das F_1^2 und F_2^2 gemeinsam haben, sind dann nur etwa ϱ_1 und ϱ_2 und deren Pole R_1 und R_2 bestimmt, die durch c gehen bezw. auf c' liegen. Als R_3 (und R_4) kann jeder Punkt auf c (und der dazu durch C_1 und C_2 harmonisch getrennt liegende) gelten und ebenso kann als ϱ_3 (und ϱ_4) jede durch c' gehende Ebene gelten. Infolgedessen muß D^2 in 2 Strahlenbüschel 1. Grades zerfallen, deren Ebenen P(c) und P(c') sind. Die Doppelkurve d^5 muß also hier ausarten. Man kann leicht beweisen, daß der in P(c) liegende Teil derselben ein Kegelschnitt ist. Zieht man nämlich in P(c) durch P einen Strahl, der c in X schneidet, so geht die Polarebene ξ von X durch c'. Ihr Schnittpunkt Y mit PX aber ist ein Punkt unserer Kurve.

Da aber der Ebenenbüschel ξ der Punktreihe X projektiv ist, so muß Y i. a. eine Kurve 2. Ordnung d^2 beschreiben. Dieselbe geht durch C_1, C_2, P und den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von c' mit P(c). Da nun P$\mathfrak{P}$ im allgemeinen nicht der Doppelkurve ganz angehört, so muß der in P(c') liegende Teil eine Kurve 3. Ordnung d^3 sein. d^3 hat in P einen Doppelpunkt. Außerdem trifft sie die Ebene P(c) noch in $\mathfrak{P}$. In der Tat fallen von den Nullpunkten der Ebene P(c) 4 nach $\mathfrak{P}$, da die in ihr liegenden Kurven f_1^2 und f_2^2 sich in C_1 und C_2 berühren. d^3 geht auch durch die beiden Punkte $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, in denen PR_1 und PR_2 die Ebenen ϱ_1 und ϱ_2 treffen. Die beiden übrigen Punkte, die d^3 noch mit einer der Ebenen ϱ_i gemeinsam hat, sind die Schnittpunkte von P(c') mit dem in ϱ_i liegenden Kegelschnitt l_i^2.

Damit sind jedoch die vorhandenen Doppelkurven noch nicht alle erwähnt. Aus 15. b) ist uns nämlich bekannt, daß wenn F_1^2 und F_2^2 sich berühren, die Kurve l^{10} 4 Doppelpunkte hat (abgesehen von den allgemeinen), die in den Ebenen $l(C_1)$ und $l(C_2)$ zu Paaren liegen. Es sind also die Ebenenbüschel mit den Achsen PC_1 und PC_2, welche die noch zu untersuchenden Doppelkurven erzeugen. Die beiden Kegelschnitte f_1^2 und f_2^2, die in einer Ebene des Büschels $PC_1(\pi)$ liegen, berühren sich in C_1. Von den Nullpunkten dieser Ebene fallen daher 2 Paare auf der Schnittgeraden s von π mit der Tangentialebene γ_1 (in C_1) zusammen. Beschreibt π ihren Büschel, so erzeugt s um C_1 einen Strahlenbüschel, von dem jeder Strahl zunächst 2 Punkte der gesuchten Doppelkurve enthält. Fällt aber s mit der Tangente an c_1^2 oder c_2^2 in C_1 zusammen, so oskulieren die Kegelschnitte f_1^2

und f_2^2. Von den Punkten der Kurve, die durch s erzeugt werden, fällt dann folglich einer nach C_1 selbst. C_1 ist mithin ein Doppelpunkt der Doppelkurve, die in γ_1 liegt. Dieselbe muß daher von 4. Ordnung sein; sie heiße d_1^4. Fällt π mit P(c) zusammen, so fallen die beiden durch s erzeugten Punkte der d_1^4 mit $\mathfrak{P}$ zusammen. $\mathfrak{P}$ ist also ein Doppelpunkt der d_1^4. Berührt aber π die Fläche F_i^2 in S_i oder S_i', so ist C_1S_i oder C_1S_i' eine Tangente der d_1^4 in S_i bezw. S_i'. Die Kurve d_1^4 berührt mithin F_i^2 in C_1 zweifach in S_i und S_i' aber je einfach.

Auf gleiche Weise läßt sich in der Tangentialebene γ_2 von C_2 eine Doppelkurve d_2^4 konstruieren, die C_2 und gleichfalls $\mathfrak{P}$ als Doppelpunkte enthält und die 4 Schnittgeraden von γ_2 mit F_1^2 und F_2^2 als Tangenten hat.

Die Fläche P^{10} hat also diesmal 4 dreifache Gerade a', b', c', d', einen Doppelkegelschnitt d^2, eine Doppelkurve 3. Ordnung d^3 und 2 Doppelkurven 4. Ordnung d_1^4 und d_2^4.

Berühren sich F_1^2 und F_2^2 nur in einem Punkte C, so bleibt der Kegel D^2 und daher auch d^5 erhalten. In der Ebene γ, der Tangentialebene in C, liegt auch diesmal eine Doppelkurve d^4 4. Ordnung, die aber außer C keinen weitern Doppelpunkt hat. Natürlich haben auch r_1^8 und r_2^8 in C Doppelpunkte.

Artet reziprok die abwickelbare Fläche φ^4 in 2 Ebenenbüschel 2. Klasse aus — sie mögen Γ_1^2 und Γ_2^2 genannt werden —, so sind die oben mit γ_1 und γ_2 bezeichneten Ebenen nicht nur Doppelebenen von φ^4, sondern auch solche von P_1^8 und P_2^8. Der Strahlenbüschel δ^2 aber zerfällt in 2 Strahlenbüschel 1. Klasse, deren Scheitel die Schnittpunkte der Ebene ε mit den

Geraden c und c' sind. Die abwickelbare Fläche Δ^5 zerfällt also hier in 2 Ebenenbüschel höherer Klasse, deren Scheitel die eben erwähnten Punkte (ε, c) und (ε, c') sind. Der durch den letzten Punkt hervorgebrachte ist von 2. Klasse; er heiße Δ^2. Er enthält als Ebenen γ_1, γ_2, ε und die Verbindungsebene π' von (ε, c') mit der Geraden c. Der 2. Ebenenbüschel ist von 3. Klasse; er heiße Δ^3. Er enthält die Ebene ε als Doppelebene und π' als einfache.

Außerdem gibt es aber noch 2 weitere Ebenenbüschel 4. Klasse Δ_1^4 und Δ_2^4, deren Ebenen zweifache Tangentialebenen von ε^{10} sind. Die Scheitel dieser Büschel sind die Punkte C_1 und C_2. Δ_1^4 enthält γ_1 und π', Δ_2^2 aber γ_2 und π' als Doppelebenen. Außer in C_1 bezw. C_2 berührt jeder der Büschel die Flächen F_i^2 noch zweimal.

Berühren sich F_1^2 und F_2^2 nur in einem Punkt C, so bleiben δ^2 und daher auch Δ^5 erhalten, aber C ist der Scheitel eines Ebenenbüschels Δ^4, das nur Doppeltangentialebenen von ε^{10} enthält. Δ^4 enthält die Tangentialebene γ in C als Doppelebene.

37. Sei von jetzt ab P identisch mit einem Eckpunkte des Tetraeders $R_1R_2R_3R_4$, wiederum etwa mit R_1. Da wir wissen, daß von den Nullpunkten einer Ebene π des Bündels hier stets 2 in der Ebene ϱ_1 liegen, auch von den mit einem Strahl des Strahlenbündels $P \equiv R_1$ inzidenten Nullpunkten stets 2 in ihrem Treffpunkt mit ϱ_1 liegen, so gehört ϱ_1 selbst als zweifach zu rechnender Teil zu P^{10}. Die Restfläche ist daher nur noch von 8. Ordnung und heiße R_1^8. Dieselbe berührt F_1^2 längs des Kegelschnittes $k_{11}^2 \equiv s_1^2$ einfach und durchdringt sie in den Kurven k^4 und r_1^8.

Die Kurve r_1^8 hat hier eine besondere Eigenschaft. Eine Berührungsebene des Kegels $R_1(k_{12}^2)$ schneidet F_1^2 in einem Kegelschnitt f_1^2, ϱ_1 aber in einer Geraden p_1, welche die Polare von R_1 i. b. a. f_1^2 ist. Die beiden durch unsere Ebene π erzeugten Punkte von r_1^8 liegen mithin mit R_1 in einer Geraden, die ϱ_1 in Z treffe. Berührt π die Kurve k_{12}^2 in R, so ist Z von R harmonisch getrennt durch die Schnittpunkte von p_1 mit f_1^2, oder was dasselbe ist, mit k_{11}^2. Beschreibt nun π den Büschel 2. Klasse $R_1(k_{12}^2)$, so erzeugt Z nach 31. eine Kurve 4. Ordnung z_1^4. Infolgedessen ist r_1^8 diesmal die Schnittkurve von F_1^2 mit dem Kegel 4. Ordnung $R_1(z_1^4)$. Analoges gilt natürlich für die Fläche F_2^2.

Interessant ist die Schnittkurve von R_1^8 mit ϱ_1. Zu ihr gehören k_{11}^2 und k_{12}^2 als einfache Kurven und außerdem noch eine Kurve 4. Ordnung. Dieselbe wird auf folgende Art gefunden. Jeder Strahl l des Bündels R_1 trifft R_1^8 außer in R_1 noch in 2 Punkten, die durch R_1 und den Schnittpunkt $\mathfrak{L}_1$ von l mit ϱ_1 harmonisch getrennt sind. Fällt einer dieser Punkte in die Ebene ϱ_1, so muß auch der andere dahin zu liegen kommen, so daß dann 4 der Nullpunkte einer durch l gehenden Ebene π nach $\mathfrak{L}_1$ fallen. Dies ist aber nur möglich, wenn einer der in π liegenden Kegelschnitte f_i^2 zerfällt oder wenn f_1^2 und f_2^2 sich in 2 Punkten berühren, wenn also π eine Tangentialebene des Kegels $R_1(k_{11}^2)$, $R_1(k_{12}^2)$ oder aber des Kegels $R_1(k^4)$ ist. Die beiden ersten Fälle sind oben schon angeführt. Im letztern Falle aber muß $\mathfrak{L}_1$ mit dem in 31. mit N bezeichneten Punkt identisch werden. Beschreibt nun π den Ebenenbüschel $R_1(k^4)$, so erzeugt, eben nach 31., N die Kurve r^4 4. Ordnung.

r^4 ist also die von uns gesuchte Kurve. Ihre Eigenschaften wurden in 31. dargelegt.

Auch die Schnittkurven von R_1^8 mit ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 sind leicht zu finden. Wir wollen die mit ϱ_2 untersuchen. In ihr liegen die Kanten R_1R_3 und R_1R_4. Beide müssen nach 16. Doppelgeraden der R_1^8 sein. Die Restkurve in ϱ_2 ist also noch eine Kurve 4. Ordnung, die r_2^4 heißen soll. Man findet sie, indem man die Nullpunkte des Ebenenbüschels sucht, dessen Achse R_1R_2 ist; untersucht wurde sie gleichfalls in 16. In R_1 hat sie einen Doppelpunkt. ϱ_1 trifft sie in den 4 Schnittpunkten von ϱ_1 mit k_{11}^2 und k_{12}^2. In denselben Punkten berührt sie auch F_1^2 und F_2^2. Außerdem schneidet sie noch F_1^2 und F_2^2 in den Punkten von k^4, in denen diese Kurve die Ebene ϱ_2 trifft.

Die Strahlen R_1M_1, R_1M_2, R_1M_3, R_1M_4 sind natürlich dreifache Geraden von R_1^8. In den 6 durch R_1 gehenden Nullebenen zerfällt daher die Schnittkurve mit R_1^8 in zwei dreifach und eine zweifach zählende Gerade.

Andererseits findet man, daß wenn ε mit der Ebene ϱ_1 identisch wird, die Fläche ε^{10} zerfällt in einen doppelt zählenden Ebenenbündel, dessen Scheitel R_1 ist und eine Restfläche ϱ_1^8 von 8. Klasse. Dieselbe berührt F_1^2 längs des Kegelschnittes k_{11}^2 und hat außerdem mit ihm noch eine Fläche P_1^8 als Torsus gemeinsamer Tangentialebenen gemein. P_1^8 ist zugleich abwickelbare Fläche gemeinsamer Berührungsebenen zwischen F_1^2 und der Schnittkurve von ϱ_1 mit dem in ϱ^4 genannten Ebenenbüschel. Das Gleiche gilt für P_2^8.

Der Kegel 8. Klasse, den man von R_1 an ϱ_1^8 legen kann, zerfällt in die beiden Ebenenbüschel

2. Klasse $R_1(k_{11}^2)$ und $R_1(k_{12}^2)$ und den eben genannten Büschel 4. Klasse ϱ^4. Zu dem von R_2 ausgehenden Tangentialkegel gehören zunächst die 2 doppelt zählenden Ebenenbüschel 1. Klasse, deren Achsen die Schnittgeraden von ϱ_1 mit ϱ_3 und ϱ_4 sind. Der Restkegel aber wird erzeugt durch die Nullebenen der Geraden (ϱ_1, ϱ_2); er hat ϱ_1 zur Doppelebene. Die Ebenen dieses Kegels, die durch R_1 gehen, sind dieselben wie diejenigen, die von R_2 an die Kegel $R_1(k_{11}^2)$ und $R_1(k_{12}^2)$ gehen. Für die Punkte R_3 und R_4 gilt Analoges wie für R_2.

Die Ebenenbüschel, deren Achsen die k_{11}^2 und k_{12}^2 gemeinsamen Tangenten bilden, gehören natürlich dreifach zu ϱ_1^8. Die Tangentialkegel von einem der 6 Nullpunkte von ϱ_1 an ϱ_1^8 zerfallen daher in zwei dreifach und einen zweifach zählenden Ebenenbüschel 1. Klasse.

38. Nun soll F_2^2 wieder in einen Kegelschnitt k^2 ausarten. Da k^4 in diesem Falle in die zweifach zu nehmende Kurve c^2 ausartet, so muß P^{10} die Fläche F_1^2 längs c^2 berühren. Die Kurven s_1^2 und r_1^8 aber bleiben auch hier i. a. erhalten. Wie aber steht es mit der Schnittkurve von P^{10} und F_2^2, d. h. und der Ebene $\varkappa$ von k^2? Zu ihr gehört e^2, natürlich hier nur einfach gerechnet. Außerdem kann man durch jeden Punkt K von k^2 3 Ebenen unseres Bündels legen[1]), nämlich die beiden Tangentialebenen an den Kegel $P(e^2)$ und die Tangentialebene an den Kegel $P(k^2)$. Also zählt k^2 dreifach zur Schnittkurve. Schneidet endlich die Gerade PK, wo K der Pol von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2 ist, die Ebene $\varkappa$ in $\mathfrak{L}_K$, so gehören auch die Tan-

[1]) Die K zum Nullpunkt haben.

genten von $\mathfrak{L}_K$ an c^2 zu unserer Schnittkurve, was aus 20. hervorgeht. Damit ist die Schnittkurve vollständig bestimmt.

Von der vorhandenen Doppelkurve der P^{10} läßt sich auch hier, unabhängig von 33., beweisen, daß sie auf einem Kegel 2. Ordnung liegt. Soll nämlich auf irgend einem Strahl durch P ein Punkt der Doppelkurve liegen, so muß dieser Strahl Kante des zu dem betr. Punkt gehörigen Dreikants $q_1q_2q_3$ sein, d. h. sein Schnittpunkt $\mathfrak{L}$ mit $\varkappa$ muß i. b. a. k^2 und den zugehörigen Kegelschnitt c^2 dieselbe Polare haben. Wir wissen aber, daß die Polaren von $\mathfrak{L}$ i. b. a. alle durch die Punkte von $P\mathfrak{L}$ erzeugte c^2 durch einen Punkt L_1 gehen müssen, nämlich durch den Schnittpunkt von $\varkappa$ mit der Polaren von $P\mathfrak{L}$ i. b. a. F_1^2. L_1 muß also auf der Schnittgeraden t von $\varkappa$ mit der Ebene von s_1^2 liegen. Umgekehrt können wir daher auch sagen, dem Strahlenbüschel L_1 in der Ebene von s_1^2 entspreche reziprok 1 Strahlenbüschel, dessen Scheitel P ist und dessen Ebene durch PK geht. Die Strahlen dieses Büschels aber sind die Träger sämtlicher Punkte, welche die Eigenschaft haben, daß die Polaren der Punkte $\mathfrak{L}$ i. b. a. die durch sie erzeugten c^2 stets durch L_1 gehen. Sei die Schnittgerade dieser Ebene mit $\varkappa$ mit t_1 bezeichnet, die Polare von E_1 i. b. a. k^2 mit t_2. Als Punkt, der i. b. a. k^2 und einen der ihm zugeordneten c^2 dieselbe Polare hat, kann dann nur der Schnittpunkt T von t_1 und t_2 in Betracht kommen. Bewegt sich nun L_1 auf t, so beschreiben t_1 und t_2 projektive Strahlenbüschel, der Punkt T also einen Kegelschnitt t^2, der auch durch $\mathfrak{L}_K$ und den Pol T_1 von t i. b. a. k^2 geht. Die Doppelkurve muß also auf dem Kegel $P(t^2)$ liegen.

Übrigens ist t_1 die Polare von L_1 i. b. a. e^2, da ja L_1 der Pol der Ebene $P(t_1)$ ist i. b. a. F_1^2. T ist also der Schnittpunkt der Polaren von L_1 i. b. a. k^2 und e^2.

Die Doppelkurve ist mithin auch hier von 5. Ordnung. Sie trifft $\varkappa$ in $\mathfrak{L}_K$ und in den 4 Schnittpunkten von t^2 und k^2.

Auf dualem Weg findet man für ε^{10} Folgendes. Wird F_2^2 zu einem Kegel 2. Grades mit dem Scheitel in K, so artet φ^4 in den zweifach zählenden Tangentialkegel K^2 von K an F_1^2 aus. ε^{10} muß folglich F_1^2 längs des Berührungskegelschnittes von K^2 berühren. Dagegen bleiben der Ebenenbüschel $E_1(f_1^2)$ und der Torsus P_1^8 erhalten. Zu dem Tangentialkegel von K an ε^{10} gehört K^2 einfach, der Kegel F_2^2 selbst aber dreifach, da jede Tangentialebene von F_2^2 3 Nullpunkte enthält. Außerdem gehen von K an ε^{10} noch 2 Ebenenbüschel 1. Klasse. Ihre Achsen findet man, indem man K mit der Geraden $(\varepsilon, \varkappa)$ (wo $\varkappa$ die Polarebene von K i. b. a. F_1^2 ist), durch eine Ebene verbindet. Die Schnittgeraden dieser Ebene mit K^2 sind die gesuchten Achsen.

Den Strahlenbüschel δ^2 kann man hier auf folgende Art finden. Man verbinde K mit E_1 und beschreibe um KE_1 als Achse einen Ebenenbüschel. Dann erzeugen die zu den Ebenen dieses Büschels i. b. a. F_1^2 und K^2 konj. Durchmesser 2 projektive Strahlenbüschel, die in K ihren gemeinsamen Scheitel haben. Die Verbindungsebenen homologer Strahlen dieser Büschel erzeugen also einen Ebenenbüschel T^2 2. Klasse. Der Schnitt von ε mit diesem Büschel aber ist der Strahlenbüschel δ^2. Der Torsus Δ^5 existiert also auch hier. Die Ebenen durch K an Δ^5 sind a) die Ver-

bindungsebene von K mit der Geraden $(\varepsilon, \varkappa)$ und b) die 4 T^2 und F_1^2 gemeinsamen Tangentialebenen.

39. Von den hier in Betracht kommenden Ausartungen sei zuerst der Fall erledigt, da P in der Ebene $\varkappa$ von k^2 liegt. $\varkappa$ ist dann ein vierfach zählender Bestandteil der P^{10}; denn von jedem Punkte D in $\varkappa$ kann man 2 Tangenten an c^2 legen, die k^2 in den 4 Punkten K_1, K_2, K_1', K_2' schneiden. Da man diese Punkte auf vierfache Art (K_1K_1', K_1K_2', K_2K_1', K_2K_2') einander zuordnen kann, so ist D ein vierfacher Nullpunkt von $\varkappa$, mithin unsere Behauptung richtig.

Der noch verbleibende Rest ist von 6. Ordnung und heiße P^6. Die Schnittkurve von P^6 mit $\varkappa$ besteht aus den beiden Tangenten von P an e^2 und außerdem noch aus einer Kurve 4. Ordnung, die c^4 genannt werde. Jeder Strahl p, der durch P geht und in $\varkappa$ liegt, schneidet k^2 in 2 Punkten K_1 und K_2. Die Tangenten von K_1 und K_2 an e^2 aber schneiden sich in 4 Punkten C_1, C_2, C_3, C_4 der c^4.

Auf jeder Tangente t an e^2 müssen 4 Punkte der c^4 liegen. Denn t schneidet k^2 in 2 Punkten T und T'. Diesen entsprechen auf k^2 2 andere, die mit ihnen und P in je einer Geraden liegen. Da von diesen letztern Punkten aber je 2 Tangenten an e^2 ausgehen, so erhalten wir auf t im ganzen 4 Schnittpunkte.

Sind K_1 und K_2 konj. imaginär, so sind auch 2 der Punkte C_i, z. B. C_1 und C_2 konj. imaginär, während C_3 und C_4 reell sind. Fallen K_1 und K_2 zusammen, wird also p identisch mit den Geraden PR_1 oder PR_2 (siehe 5.), so fallen die beiden Punkte C_1 und C_2 auch nach R_1 oder R_2, während C_3 und C_4 mit den Berührungspunkten der Tangenten von R_i an e^2, nämlich B_1, B_1', B_2, B_2' inzidieren. Der Strahl aber durch R_i,

der von PR_i durch R_iB_i und R_iB_i' harmonisch getrennt ist, berührt c^4 in R_i.

Nimmt p die Lage von PV_i an, so fällt einer der Punkte C_i nach V_i, 2 andere aber kommen nach O_i und O_i' (O_i und O_i' sind die Schnittpunkte von PV_i mit k^2) zu liegen. Da aber bei einer weitern Drehung von p die C_i hinsichtlich ihrer Reellität noch dieselbe Beschaffenheit zeigen, so muß c^4 den Kegelschnitt e^2 in V_i berühren.

Fällt ferner etwa K_1 mit M_1 zusammen, so berühren die von dem zugeordneten Punkt K_2 ausgehenden Tangenten an e^2 die c^4 in ihren Schnittpunkten mit der Tangente in M_1 an e^2. Liegt einer oder jeder Punkt K_i innerhalb e^2, so sind natürlich alle C_i imaginär.

Hat die Kurve auch vielfache Punkte? Da durch jeden Punkt nur 2 Tangenten an e^2 möglich sind, so sind nur Doppelpunkte denkbar. Da aber 2, einen etwaigen Doppelpunkt erzeugende Tangenten mit den ihnen entsprechenden p ein Viereck hervorrufen, von dessen Diagonalpunkten einer nach dem Doppelpunkt selbst, ein zweiter nach P fällt, so muß der Doppelpunkt auf der Polaren von P i. b. a. k^2, also auf R_1R_2 liegen. Nun sind aber R_1 und R_2 schon Punkte der c^4. Dieselbe hat also höchstens einen Doppelpunkt. Man findet ihn, indem man den Pol von R_1R_2 i. b. a. e^2 sucht und ihn mit P verbindet. Der Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ dieser Geraden mit R_1R_2 ist der gesuchte Punkt.

Geht endlich noch p durch den Schnittpunkt G von V_1V_2 und R_1R_2, so liegen die Berührungspunkte der entsprechenden zugehörigen Tangenten paarweise in einer durch P gehenden Geraden. Von den zugehörigen C_i liegt dann ein Paar auf V_1V_2, das andere aber auf einer gleichfalls durch P gehenden Geraden.

Damit sind auch die 4 Punkte von c^4, die auf V_1V_2 liegen, vollständig bestimmt.

Die Kurve c^4 hat einige für uns wichtige Ausartungen. Hat z. B. P i. b. a. k^2 und e^2 dieselbe Polare, so tritt der zuletzt erwähnte Fall für jeden Strahl p ein, d. h. V_1V_2 gehört dann als Doppelgerade zu c^4. Der noch verbleibende Rest der Kurve ist also ein Kegelschnitt; er trifft e^2 in B_1, B_1', B_2, B_2', k^2 in O_1, O_1', O_2, O_2' und V_1V_2 in den Punkten, in welchen die Tangenten in M_i an e^2 sich auf V_1V_2 schneiden.

Noch einfacher wird die Ausartung, wenn P auf k^2 liegt. Die Punkte C_i liegen dann alle auf den Tangenten von P an e^2. Durch jeden Punkt dieser Tangenten geht außer ihr nur noch eine weitere Tangente an e^2. Da diese aber 2 Punkten auf k^2 entspricht, so zerfällt c^4 diesmal in die beiden zweifach zählenden Tangenten von P an e^2.

Von P^6 läßt sich also zunächst feststellen, daß sie $\varkappa$ in den Strahlen PV_1 und PV_2 und in der Kurve c^4 schneidet, ferner F_1^2 längs des Kegelschnittes s_1^2 zweifach berührt und außerdem noch in den Schnittkurven von F_1^2 mit den Polarebenen von R_1 und R_2 schneidet.

Was geschieht aber diesmal mit der Doppelkurve d^5 und ihrem Träger, dem Kegel D^2? Man findet, daß jeder Strahl p des in $\varkappa$ liegenden Büschels P(p) eine Erzeugende von D^2 ist, da seine beiden Polaren sich in K schneiden. Den auf p liegenden Punkt von d^5 aber findet man, indem man ihn zum Schnitt bringt mit der Verbindungslinie seiner Pole P_e und P_k i. b. a. e^2 und k^2. Beschreibt p seinen Büschel, so erzeugen P_e und P_k i. a. 2 projektive Punktreihen, $P_eP_\varkappa$ be-

schreibt also einen Strahlenbüschel 2. Klasse und der Schnittpunkt von $P_c P_k$ mit p eine Kurve 3. Ordnung, d^3[1]), die P zum Doppelpunkt hat. Zu D^2 gehört also noch eine weitere Ebene δ und zu d^5 noch eine Kurve d^2 2. Ordnung, die in δ liegt. Da auch PK 2 sich schneidende Polaren, nämlich V_1V_2 und R_1R_2 besitzt, so muß δ durch K gehen; es ist die Ebene $PK\mathfrak{C}$. Der Pol dieser Ebene i. b. a. F_1^2 ist nämlich der Schnittpunkt $\mathfrak{C}_e$ von V_1V_2 und R_1R_2; ihr Pol i. b. a. k^2 ein auf R_1R_2 liegender Punkt $\mathfrak{C}_k$. Die Polare eines Strahles d durch P in δ i. b. a. F_1^2 geht dann durch $\mathfrak{C}_e$ und liegt in der Ebene KV_1V_2; als Polare von d i. b. a. k^2 kann aber stets jede durch $\mathfrak{C}_k$ gehende, in der Ebene KR_1R_2 liegende Gerade, also auch $\mathfrak{C}_k\mathfrak{C}_e$ selbst gelten. Man konstruiert also d^2 auf folgende, uns nicht fremde Art. In δ sei die Kurve f_1^2 und die Polare p_1 von P i. b. a. f_1^2 gegeben. Man ziehe durch P den Strahl d, der p_1 in D schneide und suche auf p_1 den zu D i. b. a. deren Schnittpunkte mit f_1^2 harmonisch liegenden Punkt D_1. Verbinde D_1 mit $\mathfrak{C}$; dann ist der Schnittpunkt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}D_1$ mit d ein Punkt von d^2. Der Kegelschnitt geht natürlich durch P und $\mathfrak{C}$ und schneidet f_1^2 in den Schnittpunkten der Polaren von P und $\mathfrak{C}$ i. b. a. f_1^2. Die Fläche P^6 enthält also eine Doppelkurve 2. Ordnung.

Hat P i. b. a. e^2 und k^2 dieselbe Polare, so zerfällt P^6 in die zweifach zählende Polarebene von P i. b. a. F_1^2 und eine Restfläche 4. Ordnung, die $\varkappa$ außer in den Geraden PV_1 und PV_2 noch in einem Kegelschnitt schneidet.

Liegt endlich P auf k^2, so artet P^6 in den dreifach zählenden Tangentialkegel von P an F_1^2 aus.

[1]) Reye, G. d. L. I, S. 280.

Durch reziproke Betrachtungen ergibt sich: Artet F_2^2 in einen Kegel aus und geht ε durch den Scheitel K dieses Kegels, so artet ε^{10} aus in den vierfach zählenden Ebenenbündel, dessen Scheitel K ist und eine Fläche 6. Klasse ε^6. Der Tangentialkegel von K an ε^6 besteht aus 2 Ebenenbüscheln mit den Schnittgeraden von ε und K^2 als Achsen und einem Ebenenbüschel 4. Klasse Γ^4. Seine Ebenen findet man auf folgende Art. Durch jeden Strahl des Büschels, dessen Träger K und ε sind, kann man 2 Tangentialebenen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ an F_2^2 legen. Diese schneiden aus K^2 2 Paare von Geraden aus. Die Verbindungsebenen von je zweien dieser Geraden — abgesehen von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ — mögen γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 heißen. Sie gehören dem Büschel Γ^4 an.

Zu den F_2^2 und Γ^4 gemeinsamen Tangentialebenen gehören die Ebenen, die F_2^2 in ihren Schnittgeraden r_1 und r_2 mit ε berühren, ferner die Tangentialebenen von den Schnittgeraden zwischen K^2 und ε an F_2^2. Γ^4 und K^2 aber berühren sich längs der eben erwähnten Schnittgeraden.

Die Fläche Γ^4 hat i. a. eine Doppelebene γ. Dieselbe geht durch die Schnittgerade der Ebenen, die F_2^2 in r_1 und r_2 berühren. Die Gerade heiße r'. Sucht man noch die zu r' konj. Durchmesserebene i. b. a. K^2 und bringt dieselbe zum Schnitt mit ε, so ist die Verbindungsebene dieser Schnittlinie mit r' die gesuchte Doppelebene γ.

Der Strahlenbüschel δ^2 zerfällt hier in 2 Büschel 1. Klasse. Der Scheitel des einen Strahlenbüschels ist K. Durch ihn wird ein zu Δ^5 gehöriger Ebenenbüschel 3. Klasse erzeugt, indem man zu jedem Strahl des Büschels die konj. Durchmesserebenen i. b. a.

F_2^2 und K^2 zum Schnitt bringt und die Schnittlinie mit dem entsprechenden Strahl des Büschels K verbindet. Der Scheitel des zweiten Strahlenbüschels ist der gemeinsame Punkt der 3 Ebenen ε, $\varkappa$ und γ. Der durch ihn erzeugte Teil der Δ^5 ist von 2. Klasse; ihm gehören auch ε und γ an.

Hat aber ε i. b. a. F_1^2 und F_2^2 denselben Pol E, so zerfällt ε^6 in den zweifach zählenden Ebenenbündel, der E zum Scheitel hat und in eine Fläche ε^4 4. Klasse.

Ist endlich ε eine Tangentialebene des Kegels F_2^2, so artet ε^6 in den dreifach zählenden Strahlenbüschel 2. Klasse aus, der durch die Tangenten des Kegelschnittel f_1^2 hervorgerufen wird.

40. Schließlich falle k^2 wieder mit dem imaginären Kugelkreis zusammen. Von den Schnittkurven zwischen P^{10} und F_1^2 können s_1^2 und e^2 reell oder imaginär werden, wie gewöhnlich. Dagegen wird r_1^8 stets imaginär, welche Gestalt auch F_1^2 haben mag. Ebenso wird die Schnittkurve von P^{10} und $\varkappa$ teilweise imaginär, nämlich soweit sie mit k^2 zusammenfällt. Die andern Teile dieser Kurve können reell oder imaginär werden.

Auch die 4 dreifachen Geraden der P^{10}, die durch P gehen, sind stets imaginär. Dagegen ist der Kegel D^2 reell; seine Mantellinien können auf folgende Art gefunden werden. Man verbinde P mit dem Mittelpunkt K von F_1^2. Dann lege man durch P die Ebene τ, die zu der konjugierten Durchmesserebene von PK parallel ist und errichte in P auf τ das Lot t_1. Zieht man nun in τ einen Strahl l_1 durch P, so geht dessen konjug. Ebene τ_1 i. b. a. den Kegel $P(e^2)$ durch PK, seine konjug. Ebene τ_2 i. b. a. den Kegel $P(k^2)$ aber, die senkrecht auf ihm steht, durch t_1. Die Schnittgerade d von τ_1 und τ_2 trifft die unendlich

ferne Ebene in T. d ist aber eine Mantellinie von D^2. Beschreibt also l_1 in τ einen Strahlenbüschel $P(l_1)$, so erzeugt d seinen Kegel. Den Punkt der Kurve d^5, der auf d liegt, findet man als den Schnittpunkt von d mit der durch seine Polare i. b. a. F_1^2 gelegten, auf d senkrechten Ebene.

Ist F_1^2 eine Kugel, so haben wir die in 35. behandelte Ausartung. Zu einer beliebigen Ebene π des Bündels P erhält man den Nullpunkt, indem man vom Mittelpunkt K der Kugel auf π das Lot p' fällt. Da also hier die beiden reziproken Bündel $P(\pi)$ und $K(p')$ orthogonal sind, so muß die von ihnen erzeugte Fläche eine Kugel sein. Dazu gehören noch die beiden imaginären Tangentialebenen, die man von dem Durchmesser PK an die Kugel legen kann. Der Schnitt einer Ebene π des Bündels mit der erzeugten Kugel ist der Kreis über PK als Durchmesser, wo K der Mittelpunkt des Kreises ist, den π aus der gegebenen Kugel ausschneidet.

Wir erhalten also den bekannten Satz:

„Die Mittelpunkte aller Kreise, die ein Ebenenbündel P aus einer Kugel mit dem Zentrum K ausschneidet, liegen auf einer neuen Kugel, die PK zum Durchmesser hat. Liegt aber P in unendlicher Ferne, so zerfällt diese Kugel in die unendlich ferne Ebene und die zu der Richtung von P in K senkrecht stehende Ebene.“

41. Zum Schluß sei noch der Fall kurz erwähnt, in welchem beide Flächen F_i^2 in die Kegelschnitte k_1^2 und k_2^2 ausarten. Auch hier sei die Bezeichnung von 9. beibehalten. Der Ort der Nullpunkte des Ebenenbündels P ist auch hier eine Fläche von 10. Ordnung, P^{10}. Die Schnittkurve von $\varkappa_1$ mit P^{10} besteht vor allem aus dem dreifach zählenden Kegelschnitt k_1^2

selbst, ferner aus der Schnittgeraden k von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, die zweifach zählt und endlich noch aus den Schnittgeraden von $\varkappa_1$ mit den beiden Ebenen durch P, die k_2^2 in W_2 bezw. W_2' berühren. Die Schnittgerade dieser beiden Ebenen selbst geht natürlich durch den Pol von k i. b. a. k_2^2. Die Schnittkurven von $\varkappa_2$ mit P^{10} sind entsprechend zu konstatieren.

Auch die vielfachen Kurven der P^{10} bleiben erhalten. Die dreifachen Geraden derselben sind die Schnittgeraden der Kegel $P(k_1^2)$ und $P(k_2^2)$. Die Doppelkurve d^5 aber läßt sich auf genau dieselbe Art finden, indem man den Kegel D^2 konstruiert. Die Pole einer beliebigen Ebene δ durch P liegen nämlich in $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ und sind dort die Pole der Schnittgeraden von δ mit $\varkappa_i$ i. b. a. k_i^2. Dem Büschel P(d) in δ entsprechen also reziprok 2 in $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ liegende Strahlenbüschel, die auf k 2 projektive Punktreihen ausschneiden. Die beiden in δ liegenden Mantellinien von D^2 sind dann leicht zu finden. Auf D^2 liegen auch die Pole von k i. b. a. k_1^2 und k_2^2 und die beiden Punkte auf k, die durch W_1 und W_1', durch W_2 und W_2' harmonisch getrennt sind.

Interessant ist hier der Spezialfall, in welchem k_1^2 und k_2^2 in derselben Ebene $\varkappa$ liegen. Sie mögen sich in M_1, M_2, M_3, M_4 schneiden. Durch jeden Punkt von $\varkappa$ können 2 Tangenten an k_1^2 und 2 an k_2^2 gelegt werden. Mithin gehen durch ihn 4 Ebenen, die ihn zum Nullpunkt haben. $\varkappa$ selbst gehört also als vierfache Ebene zu P^{10}. In der Ebene PM_1M_2 aber kann jeder Punkt als zugehöriger Nullpunkt aufgefaßt werden, da man denselben ja stets mit M_1 und M_2 verbinden kann. Der Rest der P^{10} besteht daher noch aus den Ebenen PM_1M_2, PM_1M_3, PM_1M_4, PM_2M_3, PM_2M_4, PM_3M_4.

Einen weitern Nullpunkt, der nicht in einer dieser 6 Ebenen oder in $\varkappa$ liegt, gibt es hier nicht. PM_1, PM_2, PM_3, PM_4 sind je dreifache, M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 . . . je vierfache Gerade der P^{10}. Außerdem gehen noch 3 Doppelgerade durch P, nämlich die Schnittlinien der Ebenen PM_1M_2 und PM_3M_4, PM_1M_3 und PM_2M_4, PM_1M_4 und PM_2M_3.

Arten umgekehrt F_1^2 und F_2^2 in Kegel aus, deren Scheitel K_1 und K_2 sind, so umhüllen auch hier die Nullebenen der Punkte von ε eine Fläche ε^{10} 10. Klasse. Der Torsus der doppelten Tangentialebenen von ε^{10} bleibt auch hier erhalten und kann auf dieselbe Art gefunden werden wie im allgemeinen Fall.

Haben aber die beiden Kegel F_1^2 und F_2^2 denselben Punkt K zum Scheitel, während ihre gemeinsamen Berührungsebenen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 heißen, so zerfällt ε^{10} in lauter Ebenenbündel 1. Klasse. Zu ihr gehört derjenige vierfach, dessen Scheitel K selbst ist. Die Scheitel der übrigen 6 aber sind $(\varepsilon\mu_1\mu_2)$, $(\varepsilon\mu_1\mu_3)$, $(\varepsilon\mu_1\mu_4)$, $(\varepsilon\mu_2\mu_3)$, $(\varepsilon\mu_2\mu_4)$, $(\varepsilon\mu_3\mu_4)$. Die Geraden $(\varepsilon\mu_1)$, $(\varepsilon\mu_2)$, $(\varepsilon\mu_3)$, $(\varepsilon\mu_4)$ sind Achsen von Ebenenbüscheln, die dreifach, und die Diagonalen des so in ε entstehenden Vierseits sind Achsen von Büscheln, die je zweifach zu ε^{10} gehören.

42. Nun soll der Fall untersucht werden für P^{10}, in welchem F_2^2 in einen Kegel mit dem Scheitel K ausartet. Zu P^{10} gehören dann auch die beiden Tangentialebenen von P an F_2^2, da man in diesen Ebenen jeden Punkt als zugehörigen Nullpunkt betrachten kann. Die Restfläche ist daher noch von 8. Ordnung und heiße P^8. Dieselbe berührt F_2^2 längs der Berührungsgeraden der Tangentialebenen von P an F_2^2

und schneidet sie außerdem noch in den Kurven k^4 und r_2^8.

Von der Schnittkurve, die P^8 und F_1^2 bilden, bleiben s_1^2 als vierfache Kurve und k^4 erhalten. Den Rest aber erzeugt der Ebenenbüschel mit der Achse PK durch die Berührungspunkte der Tangenten, die man von K an den jeweiligen Kegelschnitt f_1^2 legen kann. P^8 berührt also F_1^2 noch längs des Kegelschnittes, den die Polarebene $\varkappa$ von K i. b. a. F_1^2 aus dieser Fläche ausschneidet. $\varkappa$ schneidet P^8 außerdem noch in einer Kurve 6. Ordnung, die den erwähnten Kegelschnitt in 6 Punkten berührt.

Zu den vielfachen Kurven der P^8 gehören die 4 Kongruenzstrahlen durch P als zweifache Gerade, da sie ja in den Tangentialebenen von P an F_2^2 liegen. P ist also vierfacher Punkt der P^8. Der Kegel D^2 kann wie im allgemeinen Falle gefunden werden. Zu seinen Erzeugenden gehört auch PK. Denn PK hat i. b. a. F_2^2 unendlich viele Polaren, die alle in seiner konj. Durchmesserebene liegen, und eine davon trifft sicher seine Polare i. b. a. F_1^2. Die Fläche P^8 enthält also eine Doppelkurve 4. Ordnung, die P zum Doppelpunkt und K zum einfachen Punkt hat. Zur vollständigen Doppelkurve der P^{10} gehört dann noch PK selbst.

Artet auch F_1^2 in einen Kegel aus, so daß wir dann 2 Kegel mit den Mittelpunkten K_1 und K_2 haben, so besteht P^{10} aus den beiden Tangentialebenenpaaren von P an F_1^2 und F_2^2 und einer Restfläche P^6, 6. Ordnung. Dieselbe enthält dann eine Doppelkurve 3. Ordnung, die durch P, K_1 und K_2 geht und auf einem Kegel 2. Grades liegt, also eine gewöhnliche Raumkurve 3. Ordnung ist.

43. Ausführlicher aber sei wieder der dazu duale Fall behandelt. F_2^2 arte also in einen Kegelschnitt k^2 aus. Zur Fläche ε^{10} gehören dann die beiden Ebenenbündel, deren Scheitel die Schnittpunkte K_1 und K_2 von ε mit k^2 sind; denn jede Ebene durch einen dieser Punkte kann als ihm zugeordnete Nullebene betrachtet werden. Die Restfläche besteht noch aus einer Fläche 8. Klasse, die ε^8 heiße. Die abwickelbare Fläche der ε^8 und k^2 gemeinsamen Tangentialebenen besteht aus φ^4 und P_2^8, die erhalten bleiben und außerdem noch aus 2 doppelt zählenden Ebenenbüscheln, deren Achsen die Tangenten an k^2 in K_1 und K_2 sind.

Zu dem zwischen ε^8 und F_1^2 auf ähnliche Art hervorgerufenen Torsus gehört wie immer $E_1(f_1^2)$ vierfach und φ^4. Der Rest besteht aus dem doppelt zählenden Ebenenbüschel $K(e^2)$, wo K der Pol von $\varkappa$ i. b. a. F_1^2 ist. ε^8 und F_1^2 berühren sich also längs des Kegelschnittes e^2.

Zu der abwickelbaren Fläche der mehrfachen Berührungsebenen von ε^8 sind natürlich wieder die Ebenenbüschel zu rechnen, die a, b, c, d in ε zu Achsen haben; jede Ebene durch eine dieser Geraden berührt aber nur zweimal. ε selbst ist also vierfache Tangentialebene. Irgend eine weitere, ε^8 zweifach berührende Ebene δ schneide ε wieder in d, und d treffe $\varkappa$ in D. Dann kann man behaupten, daß d zu den Geraden k_i gehören muß, welche in dem Ebenenbüschel $d(\pi)$ die in 8. mit K^5 bezeichnete Regelfläche erzeugen. Dort wurde aber auch dargelegt, daß δ aus $\varkappa$ eine Gerade k ausschneiden muß, die durch den Schnittpunkt K_d der Polaren von D i. b. a. k^2 und e^2 gehen muß. Der Punkt K des Kegelschnittes f^2,

den δ erzeugt, muß der Pol von k sein i. b. a. f_1^2, den δ aus F_1^2 ausschneidet. K ist also der Treffpunkt der Polaren von k mit ε, und d ist identisch mit KD.

Beschreibt nun D die Punktreihe $(\varepsilon, \varkappa)$, so erzeugt K_d einen Kegelschnitt l^2, der k^2 und e^2 in je 4 Punkten, $(\varepsilon, \varkappa)$ aber in 2 Punkten schneidet, welch letztere i. b. a. K_1, K_2 und E_1, E_2 harmonisch liegen. Die Gerade k aber ruft einen Strahlenbüschel 3. Klasse λ^3 hervor[1]). Die Polare von k muß infolgedessen einen Kegel 3. Ordnung mit dem Scheitel in K beschreiben. Der Punkt K bewegt sich demnach in ε in einer Kurve 3. Ordnung, die l^3 heißen möge. Von den 3 Schnittpunkten zwischen l^3 und $(\varepsilon, \varkappa)$ sind zunächst E_1 und E_2 bekannt. Schneidet ferner die Verbindungsgerade der Pole von $(\varepsilon, \varkappa)$ i. b. a. k^2 und e^2 die Gerade $(\varepsilon, \varkappa)$ in T, so ist auch T ein Punkt von l^3. Den Pol $\mathfrak{R}$ von $(\varepsilon, \varkappa)$ i. b. a. f_1^2 aber enthält l^3 als Doppelpunkt.

Welcher Art ist nun noch der Strahlenbüschel, den d erzeugt? Durch jeden Punkt D geht nur eine Gerade d. Da aber $(\varepsilon, \varkappa)$ selbst als einfache Gerade (durch T erzeugt) zu dem Büschel gehört, so muß derselbe von 2. Klasse sein; er sei mit λ^2 bezeichnet.

Der gesuchte Torsus, der von δ eingehüllt wird, ist mithin von 4. Klasse; er heiße Δ^4. $\varkappa$ enthält er als einfache, ε aber als zweifache Ebene. Die 8 Ebenen von Δ^4, die F_1^2 berühren, werden teilweise hervorgerufen durch die 4 Schnittpunkte von e^2 und l^2, teilweise durch die 4 Tangenten, die f_1^2 und λ^2 gemeinsam

[1]) Reye, G. d. L. I, S. 280.

haben. 4 derselben gehen also durch K und 4 durch den Pol E_1 von ε.

Zu dem vollständigen Torsus zweifacher Berührungsebenen der Fläche ε^{10} gehört dann natürlich noch der Ebenenbüschel 1. Klasse mit $(\varepsilon, \varkappa)$ als Achse, so daß er auch hier eigentlich von 5. Klasse ist.

Geht ε durch den Punkt K, so liegt E_1 in $\varkappa$ und ist der Pol von $(\varepsilon, \varkappa)$ i. b. a. e^2. Die Ebenenbüschel $E_1(f_1^2)$ und $K(e^2)$ und die Fläche φ^4 bleiben erhalten. Da aber ε den Kegel $K(k^2)$ in 2 Geraden schneidet, so müssen 4 Erzeugende von φ^4 in ε selbst liegen, nämlich die Tangenten von K_1 und K_2 an f_1^2, a, b, c, d. Die Kurve 8. Ordnung, die ε aus φ^4 ausschneidet, zerfällt also in 4 Gerade und eine Kurve 4. Ordnung.

Die Kurven l^2 und λ^3 bleiben bestehen; nicht so l^3 und λ^2. Jede Polare der Erzeugenden von λ^3 trifft ε in K. 3 dieser Polaren aber liegen in ε selbst, nämlich die Geraden KE_1, KE_2 und KT. l^3 zerfällt also in 3 durch K gehende Strahlen. Bezeichnet man noch die Polare von KT mit t' und den Schnittpunkt von t' und $(\varepsilon, \varkappa)$ mit T', so zerfällt λ^2 in 2 Strahlenbüschel 1. Klasse, deren Scheitel K und T' sind. Die abwickelbare Fläche Λ^4 zerfällt daher in einen Ebenenbüschel 3. Klasse $K(\lambda^3)$ und einen Büschel 1. Klasse, dessen Achse t' ist.

44. Lassen wir jetzt k^2 wieder mit dem imaginären Kugelkreis identisch werden. Die Ebenenbüschel $E_1(f_1^2)$ und $K(e^2)$ können hier, wie gewöhnlich, reell oder imaginär werden. Dagegen wird φ^4 stets imaginär. Ebenso werden die beiden Ebenenbündel, die K_1 und K_2 zum Scheitel haben, niemals reell.

Um den Kegel K^6 zu finden, den man vom Mittelpunkt K von F_1^2 an ε^8 legen kann, schlage man

folgenden Weg ein. Zu jeder Mantellinie des Kegels $K(k^8)$ (vgl. 37.)[1]) konstruiere man in K die Normalebene und die i. b. a. den Kegel $K(e^2)$ konj. Durchmesserebene. Die Ebene durch die Mantellinie und die Schnittgerade der erwähnten Ebenen ist eine Erzeugende des Ebenenbüschels K^6.

Ein ähnliches Verfahren kann man anwenden zur Konstruktion der Ebenen von Δ^4. Man legt durch K eine zu ε parallele Ebene ε'. In ihr ziehe man durch K einen beliebigen Strahl $\mathfrak{k}$ und konstruiere dazu die Normalebene und die i. b. a. $K(e^2)$ konj. Durchmesserebene; beide Ebenen mögen sich in $\mathfrak{k}_1$ schneiden. Beschreibt $\mathfrak{k}$ um K einen Büschel, so erzeugen die erwähnten Ebenen projektive Ebenenbüschel, $\mathfrak{k}_1$ also einen Kegel $K(l^2)$. Die Verbindungsebene $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1)$ aber gehört dem Büschel $K(\lambda^3)$ an. Durch E_1 legt man alsdann den zu $K(l^2)$ parallelen Kegel $E_1(l^2)$. Er schneidet ε in einem Kegelschnitt l_1^2, und der Polarkegelschnitt von l_1^2 i. b. a. f_1^2 ist λ^2, der von den Geraden d eingehüllt wird. Die zu $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}_1)$ parallele Ebene, die durch den zugehörigen Strahl d geht, ist eine Tangentialebene von Δ^4.

Ist der Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ von f_1^2 und der Fußpunkt $\mathfrak{K}_1$ des Lotes von E_1 auf ε gegeben, so kann man leicht l_1^2 und λ^2, zugleich aber auch λ_1^3 und l^3 konstruieren (λ_1^3 sei die Schnittkurve von ε mit dem Kegel $E_1(\lambda^3)$). Man zieht durch $\mathfrak{K}$ einen beliebigen Strahl a und suche dazu den konjug. Durchmesser b; fälle ferner von $\mathfrak{K}_1$ auf a das Lot b_1. b und b_1 schneiden sich in A, einem Punkte von l_1^2. Die Polare a_1 von A i. b. a. f_1^2 ist parallel zu a. Die Kurve l_1^2 geht durch

[1]) $k^8 \equiv$ Schnittkurve von ε mit R_1^8.

die unendlich fernen Punkte der Achsen von f_1^2; sie ist also eine gleichseitige Hyperbel, die durch den Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ von f_1^2 geht und deren Asymptoten den Achsen von f_1^2 parallel sind. Der Büschel λ^2 enthält folglich auch die Achsen als Erzeugende, aber auch die unendlich ferne Gerade und umhüllt daher eine Parabel.

Der Büschel λ_1^3 aber wird gefunden, indem man durch A zu a die Parallele a_2 zieht. a_2 fällt zweimal mit der unendlich fernen Geraden zusammen; nämlich als zu den uneigentlichen Punkten der l_1^2 gehörig. Für $A \equiv \mathfrak{K}$ ist a_2 mit dem zu $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ konj. Durchmesser identisch. Außerdem kann a_2 nur noch dann durch $\mathfrak{K}$ gehen, also mit a zusammenfallen, wenn auch b mit a zusammenfällt. Dies trifft zu für die beiden Asymptoten von f_1^2. Die Kurve l^3 endlich entsteht durch die Gesamtheit aller Pole des Büschels λ_1^3. Sie enthält $\mathfrak{K}$ als Doppelpunkt und hat mit der uneigentlichen Geraden die unendlich fernen Punkte der Asymptoten von f_1^2 und den des zu $\mathfrak{K}\mathfrak{K}_1$ konjugierten Durchmessers gemeinsam. Die 4 Schnittpunkte von l_1^2 und f_1^2 gehören auch l^3 an, und die Tangenten daselbst sind auch Erzeugende von λ^2 und λ_1^3.

Unter den hier auftretenden Ausartungen sei zuerst wieder der Fall angeführt, in welchem k^2 auf F_1^2 liegt, diese Fläche also eine Kugel ist. ε^8 wird dann nach 35. zu einer Fläche 2. Klasse, die auch ε und die unendlich ferne Ebene zu Tangentialebenen hat, also ein Paraboloid sein muß. Wir können also sagen:

„*Die Ebenen aller auf einer Kugel liegenden Kreise, deren Mittelpunkte sich in einer Ebene ε befinden, umhüllen ein Paraboloid. Zu den Tangentialebenen des Paraboloids ge-*

hören auch die Ebenen der Berührungskegel vom Mittelpunkt K und vom Pol E von ε an die Kugel. Geht aber ε durch K, so zerfällt das Paraboloid in den Ebenenbündel K und die Gesamtheit der auf ε senkrechten Ebenen."

Geht andererseits ε durch den Mittelpunkt K von F_1^2, ohne daß diese Fläche eine Kugel ist, so artet K^6 in den doppelt berührenden Ebenenbüschel $K(\lambda^3)$ aus, dessen Konstruktion wir schon kennen. Die Kurve l^3 aber zerfällt in die beiden Asymptoten von f_1^2 und die Gerade, welche von der durch den zu ε konj. Durchmesser gehenden Normalebene auf ε in letzterer ausgeschnitten wird, also der Geraden $K\mathfrak{R}_1$. λ^2 zerfällt in 2 Strahlenbüschel 1. Klasse, nämlich in den mit K als Scheitel und in den Parallelstrahlenbüschel, dessen Richtung der zu $K\mathfrak{R}_1$ konj. Durchmesser angibt. Auch λ_1^3 zerfällt; er besteht aus 3 Parallelstrahlenbüscheln; die Richtungen liegen in den Asymptoten und ebenfalls in dem zu $K\mathfrak{R}_1$ konj. Durchmesser. Δ^4 aber zerfällt in den Ebenenbüschel $K(\lambda^3)$ und einen Parallelebenenbüschel. Die Richtung des letztern wird angegeben durch eine Ebene, die durch den zu ε i. b. a. F_1^2 konj. Durchmesser und durch den zu $K\mathfrak{R}_1$ i. b. a. f_1^2 konj. Durchmesser geht.

Zusammenfassend kommen wir also zu folgendem Satz:

„Gegeben eine Fläche F^2 und eine Ebene ε. Die Gesamtheit aller Ebenen, welche die Eigenschaft haben, daſs ein Brennpunkt der von ihnen aus F^2 ausgeschnittenen Kegelschnitte in ε liegt, umhüllen eine Fläche 8. Klasse, die einen Torsus zweifacher Tangentialebenen von 4. Klasse besitzt."

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel.

Die Charakteristiken des Nullsystems. Seite

1. Ordnung, Klasse und Rang der Kongruenz 5
2. Singuläre Punkte und Ebenen 5
3. Die durch die Kongruenzstrahlen des Ebenenbüschels $l(\pi)$ hervorgerufene Regelfläche A^8 7
4. Einige Ausartungen der A^8 10
5. A^8 für den Fall, daß F_2^2 zum Kegelschnitt k^2 bezw. zum Kegel K^2 wird 12
6. Die Kurve k^5 und die Regelfläche K^6, die hervorgerufen werden durch die in den Ebenen von $l(\pi)$ liegenden Ecken und Seiten des f_1^2 und f_2^2 gemeinsamen Polardreiecks, sowie deren reziproke Gebilde Σ^5 und Q^6 13
7. k^5 und K^6, wenn l durch einen Eckpunkt des F_1^2 und F_2^2 gemeinsamen Poltetraeders geht 17
8. k^5 und K^6, wenn F_2^2 zum Kegelschnitt k^2 wird . . . 19
9. k^5 und K^6, wenn F_1^2 und F_2^2 zu Kegelschnitten werden 21
10. Bestimmung des Ranges mit Hilfe von A^8 und K^6 . . 22
11. Direkte Bestimmung des Ranges — die Brennfläche der Kongruenz 23
12. Die 3 Charakteristiken des zugehörigen Nullsystems . . 24

II. Kapitel.

Der Ort der Nullpunkte des Ebenenbüschels $l(\pi)$ und die durch die Nullebenen der Punktreihe l(P) erzeugte abwickelbare Fläche.

13. Ordnung der hervorgerufenen Kurve — l^{10}. Allgemeine Eigenschaften 25
14. Klasse des erzeugten Torsus — T^{10}; seine Eigenschaften 28

Seite

15. Einige Ausartungen von l^{10} und T^{10}, hervorgerufen durch besondere Lagen von F_1^2 und F_2^2 28
16. 17. Ausartungen von l^{10} und T^{10}, hervorgerufen durch spez. Lage von l 30
18. F_1^2 und F_2^2 werden zu Kugeln 36
19. F_2^2 wird zum Kegelschnitt bezw. zum Kegel (l^8 und T^8) 38
20. Hiervon einige Ausartungen 39
21. 22. F^2_2 wird identisch mit dem imaginären Kugelkreis; die von den Asymptoten gebildete Fläche A^4 41
23. F_1^2 und F_2^2 werden zu Kegelschnitten bezw. Kegeln . . 45
24. l^{10} für den Fall, daß F_2^2 zum Kegel wird 48
25.—27. T^{10} für den Fall, daß F_2^2 zum Kegelschnitt wird . 49
28. T^{10}, wenn F_2^2 mit dem imag. Kugelkreis identisch wird 58

Der Ort der Nullpunkte eines Ebenenbüschels 2. Klasse Π^2 und die durch die Nullebenen der Punkte eines Kegelschnitts l^2 erzeugte abwickelbare Fläche.

29. Ordnung der Kurve und Klasse des Torsus — l^{20}, T^{20} . 61
30. Π^2 ist Tangentialkegel von F_2^2 — l^2 liegt auf F_2^2 . . 63
31. Π^2 gehört zu dem durch F_1^2 und F_2^2 bestimmten Flächenbüschel, l^2 zu der durch F_1^2 und F_2^2 bestimmten Flächenschar 65

III. Kapitel.

Der Ort der Nullpunkte eines Ebenenbündels P und die von den Nullebenen der Punkte eines ebenen Feldes ε umhüllte Fläche.

32. Ordnung der von dem Ebenenbündel hervorgerufenen Fläche — P^{10}. Eigenschaften 69
33. Doppelkurven auf P^{10} 71
34. Die reziproke Fläche ε^{10}; ihre Torsen mehrfacher Tangentialebenen 74
35. P^0 und ε^{10}, wenn F_1^2 und F_2^2 sich längs eines Kegelschnittes berühren 77
36. F_1^2 und F_2^2 berühren sich in 2 Punkten 80
37. P wird identisch mit R_1 bezw. ε mit ϱ_1 (R_1^8, ϱ_1^8) . . . 83
38. F_2^2 artet aus in einen Kegelschnitt bezw. Kegel . . . 86
39. Hiervon einige Ausartungen 89

Seite

40. P^{10} für den Fall, daß F_2^2 mit dem imaginären Kugelkreis zusammenfällt 94
41. F_1^2 und F_2^2 arten in Kegelschnitte bezw. Kegel aus . . 95
42. P^{10} für den Fall, daß F_2^2 zum Kegel wird (P^8) . . . 97
43. ε^{10} für den Fall, daß F_2^2 zum Kegelschnitt wird — ε^8 . 99
44. ε^8 für den Fall, daß F_2^2 mit dem imaginären Kugelkreis identisch wird 101

Literatur.

Ameseder, Das allgemeine räumliche Nullsystem 2. Grades (Crelles Journal Bd. 97, S. 62 ff.).

Sturm, R., Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie, 1. und 2. Teil (1892, 1893).

Lebenslauf.

Ich, Joseph Welsch, bin geboren am 11. Februar 1882 zu Kirkel, B.-A. Homburg in der Rheinpfalz, als Sohn des Landwirtes Jakob Welsch und dessen Ehefrau geb. Bartscherer. Ich bin katholischer Konfession und bayerischer Staatsangehöriger. Von 1888—1895 besuchte ich die Volksschule meines Heimatsortes. Nachdem ich ein Jahr Privatunterricht genommen hatte, trat ich im September 1897 in das humanistische Gymnasium Speyer ein, das ich Juli 1903 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Von 1903—1907 studierte ich an der Universität München Mathematik und Physik. Daselbst legte ich auch in den Jahren 1905 und 1907 die vorgeschriebenen Staatsprüfungen für den Unterricht in der Mathematik und Physik an den bayerischen höhern Schulen ab.

Von Juli 1907 bis August 1908 war ich an der privaten Realschule „Reformschule Blaubeuren“ in Württemberg tätig. Seit dieser Zeit bin ich als Lehrer der Mathematik und Physik an der Talmud-Tora-Realschule in Hamburg angestellt.